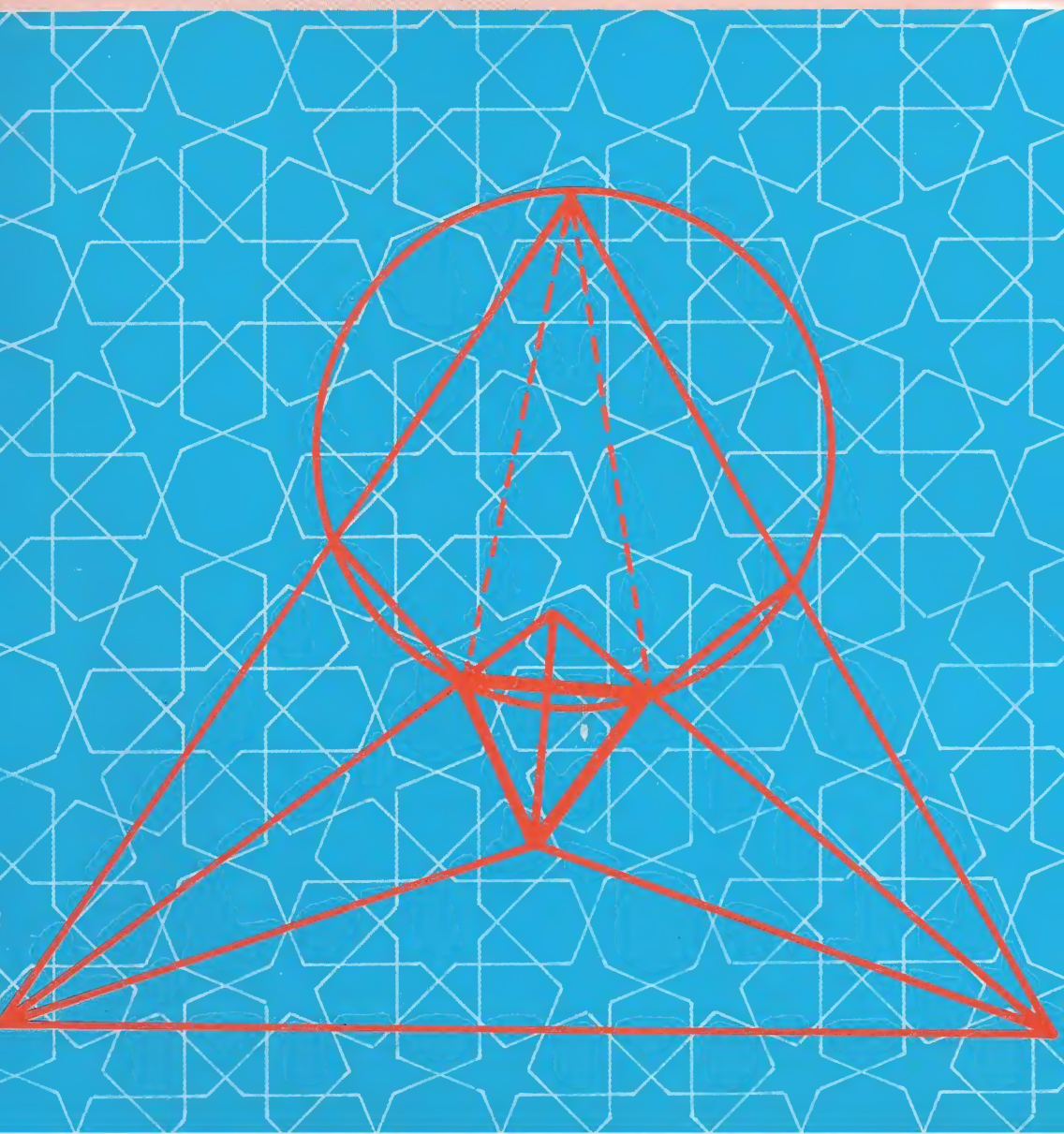




بازآموزی بازشاخت هند

برای دانش آموزان مسلمان بستان

مؤلفان: ه. س. م. گوکس تیر- س. ل. کرتیر ترجمه: عبدالحسین مصطفی



بازآموزی بازشاخت هند

برای دانش آموزان مسلمان بریتان

مؤلفان

H. S. M. COXETER

دانشگاه Toronto

S. L. GREITZER

دانشگاه Rutgers

R. MARCHAND : برگردان از انگلیسی به فرانسه توسط :

عبدالرحیم مصحفی : برگردان از فرانسه به فارسی توسط :

Coxeter, Harold Scott Macdonald.

کوکسی نیر، هارولد اسکات مک دونالد، ۱۹۰۷ -

بازآموزی و بازشناخت هندسه: برای دانش‌آموزان و معلمان دبیرستان. مؤلفان [هارولد اسکات مک دونالد کوکسی نیر، ساموئل گریترز]؛ برگردان از فرانسه به فارسی توسط عبدالحسین مصحفی. - تهران: مدرسه، ۱۳۶۳. ۲۳۰ ص. : مصور.

I.S.B.N: 964-353-337-9.

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیبا (فهرست‌نویسی پیش از انتشار).

Geometry revisited.

عنوان اصلی:

چاپ سیزدهم: ۱۳۸۶.

۱. هندسه جدید. الف. گریترز، ساموئل. Greitzer, Samuël. ب. مصحفی، عبدالحسین، مترجم. ج. مدرسه. د.

عنوان.

۵۱۶/۰۴

۲ ب ۹/۱۷۳ QA

خواننده‌ی محترم، با سلام و احترام؛ ضمن تشکر از شما، خواهشمند است هرگونه نظر، انتقاد و پیشنهاد خود را در مورد این کتاب یا دیگر کتاب‌های انتشارات مدرسه از طریق پیام‌نگار (ایمیل) madreseh@madresehpublications.com یا از طریق صندوق پستی ۱۹۴۹/۱۴۱۵۵ ارائه فرمایید. هم‌چنین می‌توانید کتاب‌های ما را از طریق پایگاه اینترنتی www.madresehpublications.com ثبت و سفارش دهید تا در کوتاه‌ترین زمان ممکن، پاسخ لازم یا کتاب مورد نظر خود را دریافت کنید.



سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
وزارت آموزش و پرورش

بازآموزی و بازشناخت هندسه

برگردان از فرانسه به فارسی: عبدالحسین مصحفی

صفحه‌آرا: هوشنگ آشتیانی

رسام: اسفندیار حاج‌طاهری

چاپ اول: ۶۳ / چاپ سیزدهم: ۱۳۸۶

تیراژ چاپ اول تا دوازدهم: ۶۶۰۰۰ / تیراژ چاپ سیزدهم: ۲۰۰۰ نسخه

لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه

حق چاپ محفوظ است

شابک ۹۶۴ - ۳۵۳ - ۳۳۷ - ۹

ISBN 964-353-337-9

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، شماره ۳۶

تلفن: ۸۸۸۰۰۳۲۴-۹ (دورنویس) (فاکس): ۸۸۹۰۳۸۰۹-۹

محدودیت زمانی تحصیلات رسمی و توسعه روزافزون دامنه علوم، مانع از آن است که برنامه‌ها و کتابهای درسی مربوط به هر رشته علمی همه پیشرفتهای آن رشته را دربر داشته باشند. رفع این کمبودها از راه تهیه انتشارات دوره‌ای و کتابهای جنبی میسر می‌باشد. آموزگاران و دبیران بیش از دانش‌آموزان به‌چنین نشریه‌هایی نیاز دارند، زیرا علاوه بر لزوم احاطه آنان به آنچه که می‌آموزند لازم است که دیدی هرچه وسیع‌تر در آن زمینه داشته باشند. از اینرو، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، تهیه و انتشار چنین نشریه‌ها و کتابهایی را از جمله برنامه‌های کار خود قرار داده است.

آقای عبدالحسین مصحفی، کارشناس ریاضی پیشین برنامه‌ریزی و کتابهای درسی، با آگاهی برای برنامه کار سازمان پژوهش، ترجمه کتاب حاضر را برای انتشار در اختیار این سازمان قرار داد. متن کتاب مروری است بر قضیه‌های مهم و اساسی هندسه که بسیاری از آنها در کتابهای درسی گنجانیده نشده و مجموعه‌ای است از مسائلهایی که هر کدام از آنها مدت‌ها وقت علاقه‌مندان به هندسه را به خود مشغول داشته است و کلاً برای ارتقاء سطح معلومات تخصصی دبیران مفید می‌باشد؛ با وجود این برای آنکه کتاب کامل‌تر ارائه شود برای بررسی در اختیار آقای حسین غیور قرار گرفت که تبصره‌ها و کاردانی وی در هندسه مورد تأیید اهل فن است. آقای غیور پس از بررسی دقیق متن ترجمه و افزودن نکاتی لازم بر آن، که در جای خود در متن کتاب مشخص شده است، ضمن اظهار خوشوقتی از ترجمه و انتشار این کتاب چنین توضیح داده است:

«در کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه با نکته‌های جالب و مفاهیم تازه‌ای برخورد می‌کنیم. از این قرار:

۱- دخالت دادن اعداد مثبت و منفی در مساحت شکلها در هندسه مسطحه، دنباله کارهایی که شال ریاضیدان نامی فرانسه درباره پاره خط و زاویه انجام داده است. این عمل حکمهای راجع به مساحتها را کلیت می‌دهد و از تأثیر شکل در آنها می‌کاهد. برای مثال اگر

P نقطه‌ای از صفحه مثلث ABC باشد، دربارهٔ مساحت‌های علامت دار همواره تساوی زیر برقرار است.

$$S(PAB) + S(PBC) + S(PCA) = S(ABC);$$

۲- جفتهای نقطه‌های جدا ساز؛

۳- انحراف انعکاسی؛

۴- تعریف مقاطع مخروطی به عنوان قطبی معکوس دایره که بدین وسیله می‌توان بعضی از خواص مهم دایره را در مقطعهای مخروطی تعمیم داد.

اما باعث تعجب است که در این کتاب نسبتهای همساز و ناهمساز و دستگاه آنها در محاق فراموشی افتاده و فقط در فصل نقطه‌های جدا ساز به نسبت ناهمساز اشاره‌ای شده و تعریف آن برای چهار نقطه در صفحه تعمیم داده شده است. با تأثیر گسترده و جالبی که این نسبتها و دستگاه آنها در هندسه دارد، حذف آنها موجب نقائصی است که فهرست وار به بعضی از آنها اشاره می‌شود:

۱- با اینکه در متن کتاب گاه مسائلی پیش پا افتاده به عنوان قضیه مطرح شده اما بسیاری از قضیه‌های معروف هندسه از قلم افتاده است مانند خاصیت مهم چهار ضلعی کامل که در آن هر قطر به وسیلهٔ دو قطر دیگر به توافق تقسیم می‌شود.

۲- تبدیل تعریف قطبی نقطه نسبت به دایره به مبنای نسبت همساز، که علاوه بر دایره شامل دو خط و مقطعهای مخروطی نیز می‌شود به تعریفی به مبنای انعکاس که فقط برای دایره درست است.

۳- تبدیل برهانه‌های ساده و کوتاه با نسبت ناهمساز برای قضیه‌های پاپوس، پاسکال، بریانشن و ... به برهانه‌های مفصل و پیچیده که چند صفحه کتاب به شرح آنها اختصاص داده شده است.

با اینهمه، مطالعهٔ کتاب به وسعت دید خواننده در هندسه می‌افزاید و جالب توجه و حائز اهمیت است، و کمبودهای یاد شده شاید به این جهت پیش آمده است که مؤلفان دانشمند کتاب فقط در نظر داشته‌اند که هموطنان خود را به هندسه آشنا سازند.

بنا به یادداشت مترجم، این کتاب به زبان انگلیسی زیر عنوان:

GEOMETRY REVISITED

تألیف شده و نخستین بار از طرف مؤسسه:

Random House, Inc. New York

در سری کتابهای «کتابخانهٔ ریاضیات جدید» منتشر شده است. ترجمهٔ به فرانسه کتاب به عنوان:

Redécouvrons la Géométrie

از طرف مؤسسه انتشاراتی DUNOD در پاریس چاپ و پخش گردیده است.
 بر گردان به فارسی کتاب از روی ترجمه فرانسه آن انجام گرفته و ترجمه سه فصل اول
 آن ابتدا به صورت سلسله مقاله ها در مجله ریاضی «یکان» چاپ شده است.
 امید آنکه دبیران ریاضی و دانشجویان و دانش آموزان رشته های ریاضی و فنی ، و همه
 آنان که به تکمیل معلومات خود در هندسه شائقند ، در مطالعه و استفاده از این کتاب رضایت
 خاطر داشته باشند.

دفتر امور کمک آموزشی و کتابخانه ها

۱۳	پیشگفتار
۱۵	بخش ۱- نقطه‌ها و خط‌های وابسته به مثلث
۱۶	۱۰۱- قانون سینوسها
۱۷	۲۰۱- قضیه ژان سوا
۱۹	۳۰۱- نقطه‌های مهم
۲۳	۴۰۱- دایره‌های محاطی داخلی و خارجی
۲۶	۵۰۱- قضیه اشتینر- لموس
۳۰	۶۰۱- مثلث ارتفاعی
۳۲	۷۰۱- مثلث میانه‌ای و خط اولر
۳۴	۸۰۱- دایره نه نقطه
۳۶	۹۰۱- مثلث‌های عمودی
۴۱	بخش ۲- برخی ویژگیهای دایره
۴۱	۱۰۲- قوت يك نقطه نسبت به يك دایره
۴۶	۲۰۲- محور اصلی دو دایره
۴۹	۳۰۲- دسته دایره‌ها
۵۰	۴۰۲- تئمه درباره ارتفاعها و مرکز ارتفاعی مثلث
۵۵	۵۰۲- خط سمسن
۵۶	۶۰۲- قضیه بطلمیوس و تعمیم آن
۵۹	۷۰۲- تئمه در باره خط سمسن
۶۱	۸۰۲- قضیه پروانه
۶۳	۹۰۲- قضیه مورلی

۶۷	بخش ۳- نقطه‌های بريك استقامت و خطهای متقارب
۶۷	۱.۳- چهار گوشه‌ها ؛ قضیه وارینیون
۷۴	۲.۳- چهار گوشه‌های مجاطی؛ دستور بر اهما گویتا
۷۹	۳.۳- مثلث ناپلئون
۸۵	۴.۳- قضیه منلائوس
۸۷	۵.۳- قضیه پاپوس
۹۲	۶.۳- مثلثهای همسان ؛ قضیه دزارگ
۹۵	۷.۳- شش ضلعیها
۹۶	۸.۳- قضیه پاسکال
۱۰۰	۹.۳- قضیه برانسن
۱۰۴	بخش ۴- تبدیلات
۱۰۵	۱.۴- انتقال
۱۰۷	۲.۴- دوران
۱۰۹	۳.۴- نیم دور
۱۱۱	۴.۴- تقارن نسبت به يك محور
۱۱۳	۵.۴- مسئله فاکنانو
۱۱۶	۶.۴- مسئله سه پیمان
۱۲۲	۷.۴- تجانس
۱۲۴	۸.۴- تشابه
۱۳۰	۹.۴- تبدیلهای متوالی
۱۳۳	بخش ۵- آشنایی با هندسه انعکاسی
۱۳۳	۱.۵- جفت‌های نقطه‌های جداساز
۱۳۷	۲.۵- نسبت ناهمساز
۱۳۹	۳.۵- انعکاس
۱۴۴	۴.۵- انعکاس در صفحه
۱۴۷	۵.۵- دایره‌های عمود بر هم
۱۵۰	۶.۵- قضیه فوئر باخ
۱۵۳	۷.۵- دسته دایره‌ها
۱۵۷	۸.۵- انحراف انعکاسی
۱۶۱	۹.۵- تابعیهای هذلولوی

۱۶۷	بخش ۶- آشنایی با هندسه تصویری
۱۶۷	۱۰۶- قطبی معکوس
۱۷۳	۲۰۶- دایره مزدوج يك مثلث
۱۷۵	۳۰۶- مقطعهای مخروطی
۱۷۸	۴۰۶- کانونها و خطهای هادی
۱۸۱	۵۰۶- صفحه تصویری
۱۸۳	۶۰۶- مقطعهای مخروطی مرکز دار
۱۸۷	۷۰۶- تصویر جسم نمایی و تصویر مرکزی
۱۹۳	راهنمایها و حل تمرینها
۲۲۵	فهرست الفبایی

کسی که هندسه اقلیدسی را تحقیق می کند همانند شخصی است که در برگشت از کشورهای دور دست میهن خویش را ناچیز می شمارد.
ه. گک. فورد

در دوره تحصیلات متوسطه (در ایالات متحده آمریکا) فقط در سال دوم، درسی وجود دارد که شامل هندسه مسطحه و احیاناً مقدماتی از هندسه تحلیلی است. این درس «ریاضیات سال دوم» نام دارد. در طول تحصیلات متوسطه، این تنها موردی است که دانش آموز با درس هندسه سروکار دارد. در صورتی که برای دانش آموز با اندیشه ریاضی این موقعیت وجود دارد که جبر مقدماتی، جبر معمولی و حتی جبر عالی را فرا گیرد. از اینرو وقتی بدون تعمق اظهار نظر می شود که جبر بر هندسه برتری دارد موضوعی غیر منتظره نخواهد بود. وانگهی، اظهار نظرهای هیجان انگیز بدون قضاوت درست، برای دانش آموز این گمان را پیش می آورد که هندسه خارج از «ریاضیات روز» است و باید آن را با آنالیز یا نظریه مجموعه ها جانشین کرد.

بی توجهی که در برنامه های درسی نسبت به هندسه بکاررفته است شاید ناشی از آن باشد که کارشناسان آموزشی آنگونه که لازم است ماهیت هندسه را نمی شناسند و به پیشرفتهایی که در جریان توسعه آن تحقق یافته است وقوف کامل ندارند. چه بسیار پیامدهای درخشانی که ضمن این پیشرفتها نمایان گردیده است؛ از جمله قضیه بریانشن (بند ۹.۳)، قضیه فونرباخ (بند ۶.۵)، قضیه پترسن - اسکوت (بند ۸.۴) و قضیه مودلی (بند ۹.۲).

از نظر تاریخی باید یادآوری کرد که اقلیدس کتاب هندسه را برای آن نگاشت تا اشخاصی که به فرا گرفتن این دانش علاقه دارند از آن بهره برند. اما یکی از دلیلهای اساسی آموزش هندسه در قرن بیستم آن است که گمان می کنند روش اصولی آن بهترین وسیله آموزش استدلال منطقی است؛ و از نظر انجام يك آموزش مؤثر روی این روش پافشاری می کنند. با وجود این، هندسه دانانی، از قدیم و جدید، که این موضوع را نیز قبول

داشتند، در بکار بردن روشهایی به عدول از روش اولیه تردید نکرده‌اند. چنانچه مثلثات، هندسه تحلیلی یا روشهای برداری بتوانند کمکی باشند، هندسه دان آنها را می‌پذیرد. وانگهی در خود هندسه ناب نیز فتهایی جدید، در عین حال زیبا و پربار، وضع شده‌است؛ یکی از آنها مبتنی بر تبدیلاتی از قبیل دوران، تقارن و تجانس می‌باشد که امکان سادگی اثبات برخی از قضیه‌ها را فراهم می‌آورد و همچنین ارتباطی را بین هندسه با کریستالوگرافی برقرار می‌سازد. فصل چهارم به این حالت «حرکی» هندسه اختصاص داده شده است. فن جدید دیگر از هندسه انعکاس نام دارد که موضوع آن نقطه‌ها و دایره‌ها است به قسمی که یک خط عبارت می‌شود از دایره‌ای که بر نقطهٔ بینهایت می‌گذرد. در فصل ۵ از آن صحبت شده است. فن دیگر، هندسهٔ تصویری است که صرف نظر از فاصله‌ها و زاویه‌ها وضع بین نقطه‌ها و خطها را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهد (این بحث بطور نامحدود گسترش یافته و به پاره خطهای ساده محدود نمی‌باشد)؛ در این فن دو نقطهٔ دلخواه با یک خط بهم وصل می‌شوند و هر دو خط دلخواه در یک نقطه برخورد می‌کنند، به علاوه، دو خط موازی نیز دو خط متقاطع منظوری شوند که نقطهٔ تقاطع آنها روی خط بینهایت است. در فصل ۶ به این بحث اشاره شده است.

امروزه، هندسه همهٔ آن تواناییهایی را که کارشناسان آموزشی از آن توقع دارند بطور اعم دارا می‌باشد: همواره در طبیعت وجود دارد، آمادگی دارد تا کشف شود و ارزش خود را بنمایاند. هندسه، به ویژه بد علت و ویژگیهای وضعیت، همواره برای دانش آموز مدخلی به علم اصولی را پدید می‌آورد. آن جذابیت و زیبایی مطلق را که هندسه داشته با زهم دارا است و تشنگی نتایج آن مخدوش نگشته است. همواره مسلم بوده است که هندسه برای دانشمندان و ریاضیدانان نه تنها سودمند بلکه بسیار لازم است. حتی برای تعیین شکل مسیر قمرهای مصنوعی، هندسهٔ چهار بعدی در پیوستهٔ فضا، زمان مورد نیاز می‌باشد.

هندسه در طی قرون توسعه یافته است. مفاهیم جدید و روشهای عملی تازه در آن سر در آورده‌اند که برای دانش آموز با نوعی شگفتی و مبارز طلبی توأم بوده است. با بهترین وسایلی که مناسب باشد به اقلیدس برگردیم و بکوشیم تا خودمان برخی از نتایج تازه را کشف کنیم. شاید به این ترتیب بتوانیم آن ادعایی را که در اولین برخورد با هندسه در ما برانگیخته شده است از خود دور سازیم.

مؤلفان مخصوصاً به دکتر آنه‌لی لاکس مدیون می‌باشند که با شکیبائی ایشان را یاری داده و از بذل توصیه‌های مفید مضایقه نداشته است.

H. S. M. C.

S. L. C.

Toronto, New York

نقطه‌ها و خط‌های وابسته به مثلث

منابع و مأخذ هندسه، که نه تنها از کل منابع حساب و جبر، بلکه اقلاً از آنچه مربوط به آنالیز و حتی مربوط به هر شاخه دیگر ریاضی است، گسترده‌تر می‌باشد، گنجی سرشار از اشیاء بسیار جالب نیمه فراموش شده‌ای است که يك نسل شتابزده فرصت استفاده از آن را ندارد.

اریک بیل (E.T. Bell)

هدف از این بخش عبارتست از: یادآوری برخی از آنچه که دکتر بیل آن‌ها را اشیاء نیمه فراموش شده نامیده است، بیان اثبات چند قضیه جدید که پس از اقلیدس بررسی گردیده و کاربردی که نتایج حاصل در حل مسائل جالب داشته است. بدین منظور مثلثی دلخواه و نقطه‌ها و خط‌های مهم وابسته به آن را در نظر می‌گیریم: مرکز دایره محیطی، میاندها، مرکز ثقل، نیمسازهای زاویه‌ها، مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی، ارتفاعها، مرکز ارتفاعی، خط اولر، مرکز دایره نه نقطه.

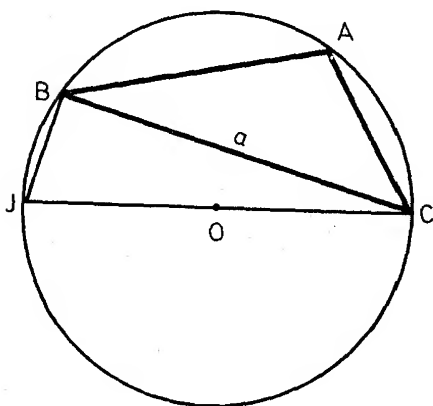
درمبحث نیمسازهای زاویه‌ها، طبیعتاً قضیه اشتینر - لموس به میان می‌آید که اثبات آن در طول یکصد سال به دشواری شهرت یافته بود، اما امروزه آن را واقعاً ساده می‌یابیم.

بالاخره با در دست داشتن يك مثلث و يك نقطه دلخواه P ، مثلث دیگری را مطرح می‌کنیم که رأسهایش عبارتند از پاهای عمودهایی که از P بر ضلعهای مثلث اول فرود می‌آیند. از این راه با مطالب آموزنده‌ای روبرو می‌شویم که برخی از آن‌ها را در بخش ۲ بیان خواهیم کرد.

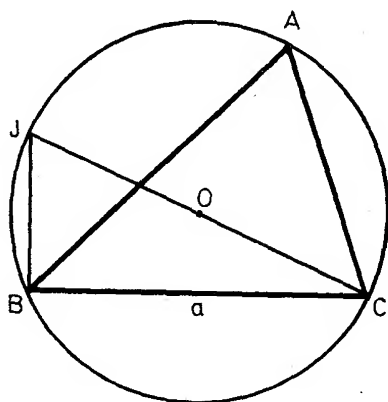
۱.۱- قانون سینوسها

قانون سینوسها یکی از قضیه‌های مثلثات است. اماد رهندسه با آن سروکار زیاد داریم. جای تأسف است که در برخی از کتابها این قضیه را آنگونه که شایسته است مهم جلوه نمی‌دهند. در اینجا قانون سینوسها را به گونه‌ای که خواهد آمد شرح و بسط می‌دهیم.

مثلث ABC را در نظر می‌گیریم که O مرکز دایره محیطی آن و R شعاع این دایره است. قطر CJ از دایره محیطی، سپس خط BJ را رسم می‌کنیم.



(شکل ۱.۱ ، ب)



(شکل ۱.۱ ، الف)

زاویه A از مثلث چد حاده و چد منفرجه باشد، زاویه CBJ قائمه است و در هر دو حالت داریم:

$$\sin J = \frac{BC}{JC} = \frac{a}{2R}$$

مطابق با شکل، اگر زاویه A حاده باشد دوزاویه A و J با هم برابرند، و اگر زاویه A منفرجه باشد دوزاویه A و J مکمل یکدیگرند. در هر دو حال داریم $\sin J = \sin A$ و بنابراین:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

در حالتی که زاویه A قائمه باشد $BC = 2R$ است و با هم رابطه اخیر محقق است. روش بالا را برای دوزاویه دیگر مثلث که بکار ببریم بدست می‌آید:

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \quad , \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

بنابراین می‌توانیم قانون سینوسها را بدصورت قضیه زیر بیان کنیم:

قضیه ۱-۱-۱- در هر مثلث ABC به فرض آنکه R شعاع دایره محیطی و a و b و c به ترتیب اندازه‌های ضلعهای BC ، CA و AB باشد داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

یادآوری - از این پس مساحت مثلث ABC را با $S(ABC)$ و مساحت یک چهارضلعی (یا چهار گوشه) $PQRS$ را با $S(PQRS)$ نشان می‌دهیم.

تمرینها

۱- ثابت کنید در هر مثلث ABC اگر زاویه‌های B و C حاده باشند داریم:

$$a = b \cos C + c \cos B$$

با استفاده از این رابطه وقانون سینوسها دستور زیر را بدست آورید:

$$\sin(B+C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B$$

۲- ثابت کنید که در هر مثلث ABC داریم:

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$$

۳- رابطه زیر را برای هر مثلث ثابت کنید:

$$S(ABC) = \frac{abc}{4R}$$

۴- دودایره به شعاعهای p و q بر نقطه A می‌گذرند و به ترتیب در B و C برخط BC مماسند. هرگاه R شعاع دایره محیطی مثلث ABC باشد ثابت کنید که:

$$pq = R^2$$

۲-۱- قضیه سوا

هر خط که يك رأس مثلث را به نقطه‌ای از ضلع روبروی آن وصل کند خط سوائی نامیده می‌شود. اگر X نقطه‌ای از ضلع BC (روی پاره خط BC یا در خارج آن) و Y نقطه‌ای از ضلع CA و Z نقطه‌ای از ضلع AB باشد، هریک از خطهای AX ، BY و CZ يك خط سوائی است. این نامگذاری از آنجا ناشی می‌شود که ژان دوسوا^۱ ریاضیدان ایتالیایی برای نخستین بار در سال ۱۶۷۸ قضیه بسیار سودمند زیر را بیان داشته است:

قضیه ۱-۲-۱- اگر در مثلث ABC سه خط سوائی AX ، BY و CZ در نقطه

P متقارب باشند داریم:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

برای اثبات قضیه قبلاً یادآوری می‌کنیم که اگر دو مثلث دارای ارتفاعهای برابر باشند، نسبت مساحت‌های آنها بر نسبت قاعده‌های آنهاست. پس:

$$\begin{aligned} \frac{BX}{XC} &= \frac{S(ABX)}{S(AXC)} = \frac{S(PBX)}{S(PXC)} \\ &= \frac{S(ABX) - S(PBX)}{S(AXC) - S(PXC)} \\ &= \frac{S(ABP)}{S(CAP)} \end{aligned}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$\frac{CY}{YA} = \frac{S(BCP)}{S(ABP)}$$

و:

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{S(CAP)}{S(BCP)}$$

(شکل ۲۰۱ الف)

از ضرب نظیر به نظیر طرفهای رابطه‌های بالا بدست می‌آید:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{S(ABP)}{S(CAP)} \cdot \frac{S(BCP)}{S(ABP)} \cdot \frac{S(CAP)}{S(BCP)} = 1$$

عکس قضیهٔ سوا نیز صحیح است و چنین بیان می‌شود:

قضیهٔ ۲۰۱-۲. اگر دو مثلث ABC برای سه خط سوائی AX ، BY و CZ

داشته باشیم:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

در این صورت سه خط مزبور متقاربند.

برای اثبات فرض می‌کنیم که P نقطهٔ برخورد AX با BY باشد و خطی که از

C به P وصل می‌شود با AB در Z' برخورد کند. در این صورت بنا به قضیهٔ سوا داریم:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1$$

از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ فرض بدست می‌آید:

$$\frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AZ}{ZB}$$

دو نقطه Z و Z' بر هم منطبقند. پس خط CZ نیز از P می‌گذرد.

تمرینها

۱- ثابت کنید که در هر مثلث سه میانه متقارند.

۲- ثابت کنید که سه ارتفاع هر مثلث متقارند.

۳- دو مثلث نابرابر ABC و $A'B'C'$ چنانند که ضلعهای آنها نظیر به نظیر با هم موازی‌ند. ثابت کنید که سه خط AA' و BB' و CC' متقارند.

۴- هرگاه در مثلث ABC طول خط سوائی AX برابر با p و طولهای BX و XC به ترتیب برابر با m و n باشد، ثابت کنید که:

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n$$

داده‌هایی - در دو مثلث ABX و

AXC مقادیر کسینوسهای دوزاویه

مجاور به رأس X را بر حسب

ضامها بنویسید و باهم جمع کنید.

در نتیجه آن رابطه استواری حاصل

می‌شود که این قضیه را استواری

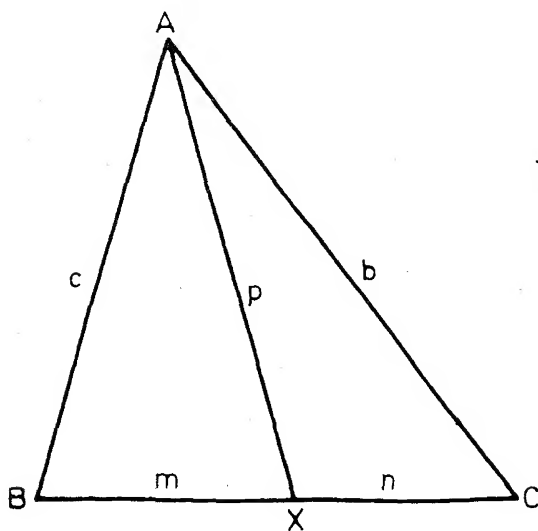
در سال ۱۷۴۶ بیان داشته است.

اما این قضیه احتمالاً نخستین بار

توسط اشمیدس در سال ۳۵۰

پیش از میلاد کشف و نخستین بار

توسط سمسن در ۱۷۵۱ ثابت شده است.



(شکل ۲۰۱، ب)

۳-۱- نقطه‌های مهم

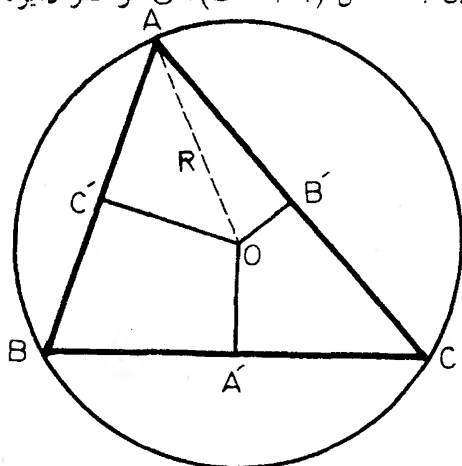
برای هر مثلث تعداد زیادی نقطه و خط مهم وجود دارد، اما ناچاریم که به برخی از آنها اکتفا کنیم. یکی از نقطه‌های مهم مثلث مرکز دایره محیطی آن است که جای تقارب سه

۱- Stewart

۲- «قضیه سوا و رابطه استوارت وقتی کاربرد گسترده دارند که با اندازه‌های جبری بیان شوند،

ح.ع.

عمود منصف ضلعهای مثلث می باشد. مطابق بسا شکل (۳.۱، الف)، مرکز دایره محیطی مثلث ABC است و OA' ، OB' ، OC' به ترتیب عمود منصفهای ضلعهای AB، BC و CA می باشند. شعاع دایره محیطی مثلث با R نشان داده می شود.



(شکل ۳.۱، الف)

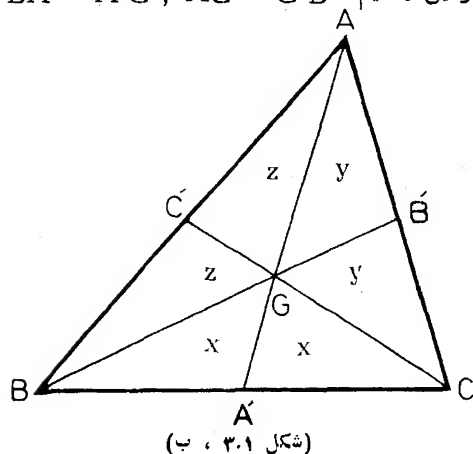
میانۀ مثلث خط سوائی است که رأس را به وسط ضلع روبرو وصل می کند. هر مثلث سه میانۀ دارد. در شکل (۳.۱، ب) خطهای سوائی AA' ، BB' و

CC' میانۀهای مثلث ABC می باشند. بنابراین داریم: $BA' = A'C$ ، $AC' = C'B$ و $CB' = B'A$ و نتیجه می شود که:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

پس بنابه عکس قضیۀ سوا، سه میانۀ مثلث متقارب می باشند.

نقطۀ تقارب سه میانۀ مثلث مرکز ثقل آن است و معمولاً با G



(شکل ۳.۱، ب)

نشان داده می شود؛ هرگاه از مقوای باضخامت یکنواخت مثلثی ببریم و G جای تقارب میانۀهای آن را بیابیم، آنگاه این مثلث مقوایی را در نقطۀ G بر نوک سوزنی تکیه دهیم در حال تعادل باقی خواهد ماند.

شکل (۳.۱، ب) را باز در نظر می گیریم. دو مثلث GBA' و $GA'C$ معادلند، زیرا قاعده های BA' و $A'C$ از آنها باهم برابرند و ارتفاع آنها مشترک است. مساحت هریک از این دو مثلث را با x نشان می دهیم:

$$S(GBA') = S(GA'C) = x$$

همچنین داریم:

$$S(GCB') = S(CB'A) = y$$

$$S(GAC') = S(CC'B) = z$$

اما دو مثلث CAC' و $CC'B$ نیز معادلند، پس: $x=y$ $\Rightarrow 2y+z=z+2x$ از اینک دو مثلث ABA' و $AA'C$ نیز معادلند نتیجه می‌شود $y=z$ و بنا بر این داریم $x=y=z$ و در نتیجه:

قضیه ۳.۱-۱ سه هیانه مثلث آن ۱۰ به شش مثلث معادل باهم تقسیم می‌کنند.
بررسی شکل (۳.۱، ب) را دنبال می‌کنیم؛ بنا بر آنچه گفتیم مساحت GAB دو برابر مساحت GBA' است. اما این دو مثلث در ارتفاع نظیر رأس B مشترکند، پس قاعده‌های آنها به نسبت ۲ بر ۱ است، یعنی: $AG=2GA'$ همچنین داریم: $BC=2GB'$ و $CG=2GC'$ ، بنا بر این:

قضیه ۳.۱-۲ هر یک از میانه‌های مثلث توسط میانه‌های دیگر به نسبت ۲ بر ۱ تقسیم می‌شود. به عبارت دیگر نقطه تلاقی میانه‌های مثلث در دو سوم ابتدا از رأس هر کدام از آنها واقع است.

در مثلث ABC خطهای سوائی AD ، BE و CF را که به ترتیب بر ضلعهای BC ، CA و AB عمود می‌باشند، ارتفاعهای مثلث می‌نامیم. مطابق باشک (۳.۱، ب) داریم:

$$BD = c \cdot \cos B, \quad DC = b \cdot \cos C$$

$$CE = a \cdot \cos C, \quad EA = c \cdot \cos A$$

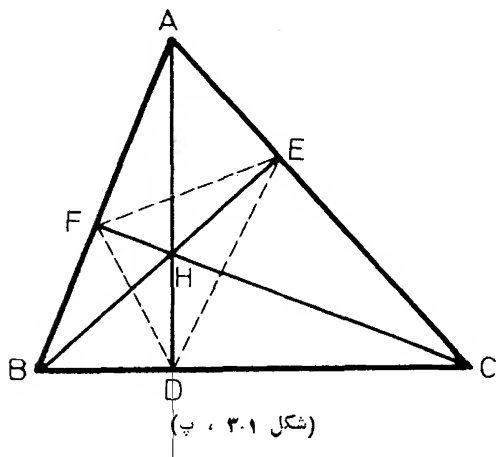
$$AF = b \cdot \cos A, \quad FB = a \cdot \cos B$$

از این رابطه‌ها نتیجه می‌شود:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

و بنا به عکس قضیه سواسه خط AD ،

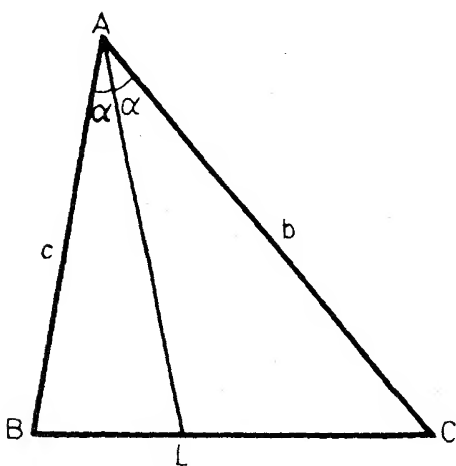
BE و CF متقارزند. یعنی:



(شکل ۳.۱، ب)

قضیه ۳.۱-۳ سه ارتفاع هر مثلث متقارزند.

نقطه تقارب ارتفاعهای مثلث مرکز ارتفاعی آن نامیده می‌شود و معمولاً آن را با H نشان می‌دهند. همچنین مثلث DEF را که رأسهایش پاهاى ارتفاعهای مثلث می‌باشند، مثلث ارتفاعی نظیر مثلث ABC می‌نامند، (شکل ۳.۱، ب).



(شکل ۳.۱، ت)

نیمسازهای زاویه‌های مثلث مجموعه دیگری از خط‌های سوائی مهم مثلث را تشکیل می‌دهند. در شکل (۳.۱، ت) خط AL نیمساز زاویه A از مثلث ABC است که زاویه A را به دو زاویه برابر با هم بخش کرده است. اندازه هریک از این دو زاویه را α می‌نامیم. دوزاویه‌ای که AL با ضلع BC می‌سازد مکمل یکدیگرند. پس سینوسهای آنها با هم برابرند. از اینرو بنا به قانون

سینوسها در دو مثلث ABL و ALC داریم:

$$\frac{BL}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin L} \quad \text{و} \quad \frac{LC}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin L}$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود:

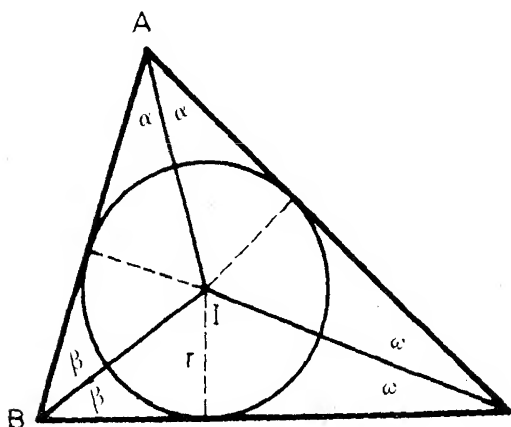
$$\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}$$

برای نیمسازهای زاویه‌های B و C نیز به همین روش رابطه‌های مشابه بدست می‌آید و از آنجا قضیه زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۳.۱-۴ در هر مثلث، هر نیمساز زاویه داخلی ضلع دو برو Δ به نسبت اندازه‌های دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند.

هر نقطه از نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و برعکس؛ هر نقطه که

از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد بر نیمساز آن زاویه واقع است. در مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های داخلی A و B در نقطه I برخورد می‌کنند. این نقطه از دو ضلع AB و AC همچنین از دو ضلع BA و BC به یک فاصله است، پس از دو ضلع CA و CB نیز به یک فاصله است و نتیجه می‌شود که I بر نیمساز زاویه C نیز واقع است. بنا بر این داریم:



(شکل ۳.۱، ث)

قضیه ۵،۳۰۱- نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث متقارند.

فاصله I تا هر يك از سه ضلع مثلث را با r نشان می‌دهیم. دایره به مرکز I و به شعاع r بر سه ضلع مثلث مماس است. این دایره را دایره محاطی مثلث می‌نامیم.

تمرین‌ها

۱- ثابت کنید که اگر يك زاویه از مثلثی منفرجه باشد، مرکز دایره محیطی و همچنین مرکز ارتفاعی این مثلث در خارج آن واقع است.

۲- دو مثلث چنانند که ضلعهای یکی از آنها به ترتیب با میانه‌های دیگری برابرند. نسبت مساحت‌های این دو مثلث را بدست آورید.

۳- ثابت کنید که اگر دو میانه از مثلثی با هم برابر باشند آن مثلث متساوی الساقین است.

۴- ثابت کنید که اگر دو ارتفاع از مثلثی با هم برابر باشند آن مثلث متساوی الساقین است.

۵- با استفاده از عکس قضیه سوا و با استفاده از قضیه (۴،۳۰۱) ثابت کنید که نیمسازهای زاویه‌های مثلث متقارند.

۶- طول میانه‌های مثلث را بر حسب a، b و c، اندازه‌های ضلعهای آن، بدست آورید.

داده‌نمایی: از رابطه استوارت (تمرین ۴ از بند ۲۰۱) استفاده کنید.

۷- ثابت کنید که مجذور طول AL، نیمساز زاویه داخلی A از مثلث ABC، برابر است با:

$$bc \left[1 - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \right]$$

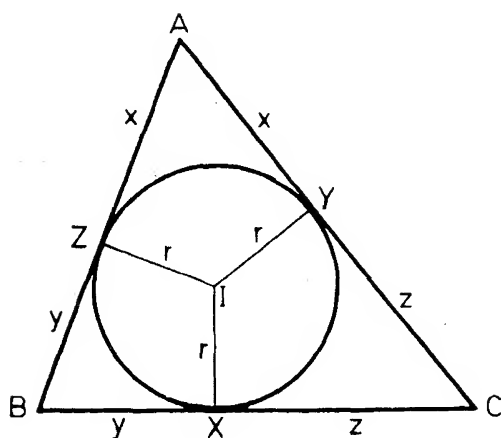
۸- در مثلثی ضلعها به اندازه‌های ۳ و ۴ و ۵ می‌باشند (این مثلث قائم‌الزاویه است).

طول نیمساز زاویه قائمه از این مثلث را حساب کنید.

۹- ثابت کنید که در هر مثلث حاصل ضرب دو ضلع برابر است با حاصل ضرب قطر دایره محیطی در طول ارتفاع نظیر ضلع دیگر.

۴.۱- دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث

در شکل (۴.۱، الف) دایره محاطی داخلی مثلث ABC در نقطه‌های X و Y و Z بر ضلعهای BC، CA و AB مماس است. دو مماس که از يك نقطه بردایره‌ای رسم شوند



(شکل ۴.۱، الف)

$$2x + 2y + 2z = a + b + c = 2s$$

$$x + y + z = s$$

دارای طولهای برابرند. پس :

$$AY = AZ = x$$

$$BZ = BX = y \text{ و } CX = CY = z$$

و چون داریم:

$$y + z = a, \quad z + x = b,$$

$$x + y = c$$

که از جمع نظیر به نظیر طرفهای این

رابطه‌ها نتیجه می‌شود:

وخواهیم داشت:

قضیه ۴.۱-۱ در هر مثلث، طول هر قطعه که توسط دایره محاطی داخلی دوی یک ضلع جدا می‌شود برابر است با تفاضل نصف محیط مثلث بر اندازه ضلع دوبرو:

$$x = s - a \text{ و } y = s - b \text{ و } z = s - c$$

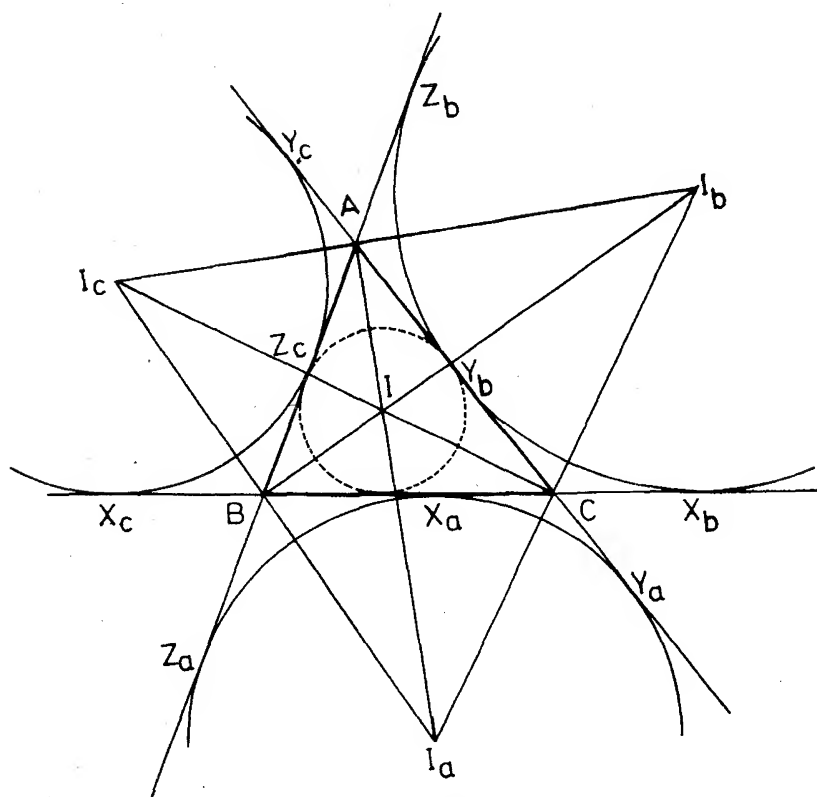
مساحت مثلث ABC برابر است با مجموع مساحت‌های مثلث‌های IAB و ICA و IBC که ارتفاع هر یک از این مثلث‌ها r است و قاعده‌های آنها به ترتیب a، b و c است. بنابراین مساحت مثلث ABC برابر می‌شود با،

$$\Delta = \frac{1}{2} (a + b + c) r = sr$$

به عبارت دیگر:

قضیه ۴.۱-۲ مساحت هر مثلث برابر است با حاصل ضرب نصف محیط در شعاع دایره محاطی داخلی آن.

نیمسازهای زاویه‌های خارجی A و B و C از مثلث ABC، مثلث $I_a I_b I_c$ را تشکیل می‌دهند (شکل ۴.۱، ب). نقطه I_a چون بر نیمساز زاویه B واقع است از دو ضلع BC و BA به یک فاصله است، و چون بر نیمساز زاویه C واقع است از دو ضلع CB و CA به یک فاصله است. پس I_a از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است و بر نیمساز زاویه A قرار دارد. برای نقطه‌های I_b و I_c نیز حکم مشابه صادق است و می‌توان گفت:



(شکل ۴.۱، ب)

قضیه ۳.۴.۱- در هر مثلث نیمسازهای دو زاویه خارجی با نیمساز زاویه داخلی دیگر متقاطعند.

فاصله I_a را از سه ضلع مثلث با r_a نشان می‌دهیم. دایره به مرکز I_a و به شعاع r_a بر ضلع BC و بر امتدادهای دو ضلع AB و AC مماس است. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر ضلع a از مثلث ABC می‌نامیم. مثلث ABC رویهم سه دایره محاطی خارجی دارد که مرکزهای آنها I_a و I_b و I_c و شعاعهای آنها به ترتیب با r_a و r_b و r_c نشان داده می‌شود. دایره محاطی داخلی و سه دایره محاطی خارجی را رویهم دایره‌های محاطی مثلث می‌نامند.

مطابق با شکل (۴.۱، ب) و با توجه به اینکه دو مماس BX_b و BZ_b باهم برابرند می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} BX_b + BZ_b &= BC + CX_b + Z_b A + AB \\ &= BC + CY_b + Y_b A + AB = a + b + c = 2s \end{aligned}$$

از این رابطه با توجه به رابطه‌های مشابه دیگر که برای رأسهای C و A وجود دارد نتیجه می‌شود:

$$AY_a = AZ_a = BZ_b = BX_b = CX_c = CY_c = s$$

و چون داریم:

$$CX_b = BX_b - BC = s - a$$

و با توجه به رابطه‌های مشابه مربوط به رأسهای A و B خواهیم داشت:

$$BX_c = BZ_c = CX_b = CY_b = s - a$$

$$CY_a = CX_a = AY_c = AZ_c = s - b$$

$$AZ_b = AY_b = BZ_a = BX_a = s - c$$

تمرینها

۱- در مثلث ABC، به مرکزهای A و B و C سه دایره چنان رسم شده‌اند که دوهو بر یکدیگر مماس خارجند. ثابت کنید شعاعهای این دایره‌ها برابرند با:

$$s - a \text{ و } s - b \text{ و } s - c$$

۲- ثابت کنید که در هر مثلث داریم:

$$abc = 4srR$$

۳- ثابت کنید سه خط AX و BY و CZ در شکل (۴.۱، الف) باهم متقارند. این نقطه تقارب به نام نقطه ژرگون^۱ معروف است.^۲

۴- ثابت کنید که مثلث ABC مثلث ارتفاعی مثلث $I_a I_b I_c$ می‌باشد.

۵- ثابت کنید که در هر مثلث داریم:

$$S(ABC) = (s - a)r_a = (s - b)r_b = (s - c)r_c$$

۶- ثابت کنید که در هر مثلث:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

۵.۱ قضیه اشتینگر - لموس

دشواری ویژه‌ای که در حل برخی از مسئله‌های هندسه یافت می‌شود، خود موجب

۱- Gergonne

۲- یادداشت مترجم: اگر در مثلث ABC سه خط سوایی AX، BY، CZ در P متقارب باشند، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{PX}{AX} + \frac{PY}{BY} + \frac{PZ}{CZ} = 1 \quad \text{رابطه ژرگون:}$$

پدید آمدن کشتی در اشخاص برای حل این مسئله‌ها است. در سده‌های گذشته وجود این چنین کشتی از امتیازهای ویژه هندسه بوده است. برای نمونه از سه مسئله بسیار مشهور قدیمی می‌توان نام برد: تضعیف مکعب^۱، تثلیث زاویه^۲، تربیع دایره^۳. کوششهایی که برای حل این مسئله‌ها انجام گرفته خود شاخه‌های تازه‌ای را در ریاضیات پدید آورده است. حتی اکنون هم کسانی که به دنبال نام‌آوری در ریاضیات می‌باشند روشهای تازه‌ای در حل این مسئله‌ها ارائه می‌دهند و رقیبان را در پیدا کردن اشتباههای موجود در آنها به مبارزه می‌خوانند.

یکی از مسئله‌هایی که به‌ویژه همواره انگیزه‌ای برای نام‌آوری بوده است، در اینجا به صورت قضیه زیر بیان می‌شود:

قضیه ۱،۵۰۱- اگر نیمسازهای دو زاویه داخلی مثلثی باهم برابر باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است.

این مسئله در سال ۱۸۴۰ از طرف لموس^۴، که اگر غیر از این بود نامش فراموش شده بود، برای ریاضیدان بزرگ سوئیسی اشتینر^۵ فرستاده شده و حل هندسی آن از وی درخواست شده بود. اشتینر حلی بسیار پیچیده برای آن ارائه داد و این خود موجب شد که بسیاری دیگر از ریاضیدانان در جستجوی حل ساده مسئله برآیند. در سالهای ۱۸۴۲، ۱۸۴۴، ۱۸۴۸ و همچنین در همة سالهای از ۱۸۵۴ تا ۱۸۶۴، و بالاخره بطور منظم در صد سال اخیر، این مسئله زیر عنوان (قضیه اشتینر- لموس) در مجله‌های ریاضی مورد بحث بوده است.

یکی از روشهای ساده حل این مسئله بر مبنای دو لم زیر بیان می‌شود.

لم ۱،۵۰۱-۱- اگر دایره دو وتر دوبرو به دو زاویه حاده محاطی نا برابر باشند، آن وتر که بزرگتر است دوبرو به زاویه بزرگتر است.

از دو وتر نابرابر آنکه بزرگتر است به مرکز نزدیکتر است و در نتیجه زاویه مرکزی روبرو به آن بزرگتر است. هر زاویه محاطی نیمه زاویه مرکزی است که با آن روبرو بدایره وتر واقع است. بنابراین زاویه محاطی روبرو به وتر بزرگتر از زاویه محاطی روبرو به وتر کوچکتر بزرگتر است.

لم ۱،۵۰۱-۲- اگر دو زاویه از مثلثی نا برابر باشند، نیمساز زاویه کوچکتر از

۱- ترسیم مکعبی که حجم دو برابر حجم مکعب مفروض باشد.

۲- تقسیم زاویه مفروض به سه زاویه برابر (از راه ترسیم).

۳- ترسیم مربع معادل بادایره مفروض.

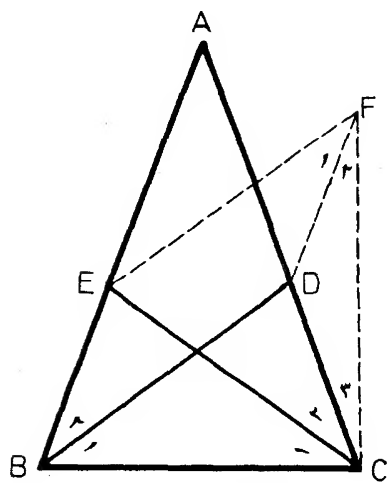
۴- C.L. Lehmus

۵- Jacob Steiner

در پاسخ باید گفت ممکن است که راه‌حلهایی به‌ظاهر مستقیم برای مسئله بیان شده باشد، اما در حقیقت هر کدام از آنها روش برهان غیرمستقیم را در خود پنهان داشته است. باید دانست که تنها قضیه‌های بسیار ساده بطور کاملاً مستقل اثبات شده‌اند، سایر قضیه‌ها با استفاده از قضیه‌هایی ثابت شده‌اند که این قضیه‌ها قبلاً به اثبات رسیده و رشته‌ای منطقی مبتنی بر اصلهای موضوع تشکیل داده‌اند. هر گاه یکی از قضیه‌های این رشته با روش برهان غیرمستقیم ثابت شده باشد، در اثبات قضیه‌های بعدی این روش برهان غیرمستقیم دخالت داشته است. وانگهی برخی از قضیه‌های بسیار ساده و اساسی نیز با برهان غیرمستقیم ثابت شده‌اند. هر گاه خود را مقید کنیم که برهان به غیر از مستقیم را نپذیریم در این صورت مجموعه قضیه‌های ما فقط به چند قضیه ساده محدود خواهد شد. شاید آگاهی بر این موضوع برای ما ناخوشایند باشد، اما ریاضیدان بزرگ انگلیسی هاردی (G.H. Hardy) در این باره گفته است: «برهان خلف، این عزیز در دانه اقلیدس، یکی از برنده‌ترین سلاح‌های ریاضیدانان است. در یک بازی شطرنج، حرکتی که انجام گیرد دیری نمی‌باید که ارزش آن معین می‌گردد؛ یک بازیکن ممکن است خطر از دست دادن یک پیاده یا مهره دیگر را بپذیرد. اما آنچه مطرح می‌باشد کل بازی است».

[یادداشت مترجم: راه‌حلی که در زیر ارائه می‌شود، و اولین بار در سال ۱۸۸۰ توسط مهندس دسکوب فرانسوی بیان شده است، علاوه بر آنکه از راه حل بالا ساده‌تر است از این نظر که فقط از مقالة اول هندسه استفاده می‌کند نیز بر آن ترجیح دارد.

در مثلث ABC نیمساز زاویه داخلی B با ضلع AC در D برخورد می‌کند و نیمساز زاویه داخلی C ضلع AB را در E قطع می‌کند. هر گاه $BD = CE$ باشد می‌خواهیم ثابت کنیم که مثلث ABC متساوی الساقین است.



(شکل ۵.۱، ب)

هر گاه دو زاویه B و C با هم برابر باشند مثلث متساوی الساقین خواهد بود. فرض کنیم که این دو زاویه نابرابر باشند و مثلاً $\hat{B} > \hat{C}$ در این صورت داریم:

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 > \hat{C}_1 = \hat{C}_2$$

EF را موازی و مساوی با BD رسم کرده و از F به C و به D وصل می‌کنیم. در متوازی‌الاضلاع $BEFD$ داریم:

$$BE = DF \text{ و } \hat{B}_\gamma = \hat{F}_\lambda$$

و در مثلث متساوی‌الساقین ECF داریم:

$$\hat{F}_\lambda + \hat{F}_\gamma = \hat{C}_\gamma + \hat{C}_\gamma$$

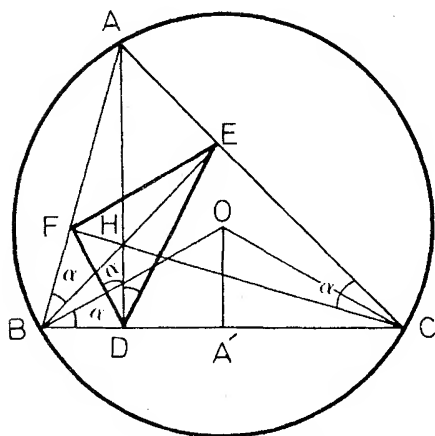
و چون $\hat{B}_\gamma > \hat{C}_\gamma$ و $\hat{B}_\gamma = \hat{F}_\lambda$ پس نتیجه می‌شود که $\hat{F}_\gamma < \hat{C}_\gamma$ و از آنجا لازم می‌آید که $CD < DF$ و در نتیجه $CD < BE$. در دو مثلث BCE و BCD ضلع BC مشترك است و دو ضلع BD و CE با هم برابرند اما $CD < BE$ بنابراین $\hat{B}_\lambda < \hat{C}_\lambda$ و در نتیجه $\hat{B} < \hat{C}$ می‌باشد که خلاف فرض است. بنابراین با فرض $BD = CE$ زاویه B نمی‌تواند از زاویه C بزرگتر باشد. اگر فرض کنیم $\hat{B} < \hat{C}$ باز به روش مشابه نقیض آن نتیجه می‌شود. بنابراین با فرض $BD = CE$ فقط تساوی دو زاویه B و C امکان دارد، یعنی مثلث متساوی‌الساقین است.]

تمرینها

- ۱- در مثلث ABC زاویه B به اندازه 12° و زاویه C به اندازه 132° است. بدون استفاده از رابطه‌های مثلثاتی طولهای BM و CN نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C را با هم مقایسه کنید.
- [این مسئله از O. Bottema است و از آن این نتیجه بدست می‌آید که ممکن است دو نیمساز زاویه خارجی از مثلثی با هم برابر باشند اما آن مثلث متساوی‌الساقین نباشد.]
- ۲- اگر خواسته باشیم قضیه (۵.۱، ۱) را روی مثلث بسوئما (مثلث تمرین قبل) ثابت کنیم، برهانی که ارائه شده از چه مرحله‌هایی اشتباه می‌شود؟
- ۳- با استفاده از فرمولی که در تمرین ۷ از بند ۳.۱ آمده است، برهانی مستقیم برای قضیه اشتینر - لموس بدست آورید.

۶.۱- مثلث ارتفاعی

در شکل (۶.۱، الف) مثلث ABC باز زاویه‌های حاده نمایانده شده است که در آن O مرکز دایره محیطی، H مرکز ارتفاعی و DEF مثلث ارتفاعی است که رأسهایش پا‌های ارتفاعها می‌باشند. برای بررسی این شکل، که بدون سود نخواهد بود، نخست معلوم می‌کنیم که کدام زاویه‌های شکل به اندازه $90^\circ - A$ می‌باشند. دو زاویه A و $A'OC$ با هم برابرند، زیرا اولی مرکزی و دومی محاطی است و هر دو نظیر



يك كمان می باشند. بنابراین هر يك از دو زاویه OBC و OCB به اندازه α است. همچنین از دو مثلث قائم الزاویه ABE و ACF بر می آید كه هر يك از دو زاویه ABE و ACF به اندازه α است. هر يك از چهار گوشه های BCEF و BDHF و CEHD محاطی است. پس:

$$\widehat{\text{HDF}} = \widehat{\text{HBF}} = \widehat{\text{EBF}} = \widehat{\text{ECF}} = \widehat{\text{ECH}} = \widehat{\text{EDH}}$$

بنابر این خط HD نیمساز زاویه EDF است.

بدروش همانند ثابت می‌شود که HE نیمساز زاویه DEF و HF نیمساز زاویه EFD است. پس در نخستین بررسی از شکل این نتیجه بدست آمده که در هر مثلث باز زاویه‌های حاده، ارتفاعها عبارتند از نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعی. به عبارت دیگر:

قضیه ۱۶۰۱ - در هر مثلث با زاویه های حاده ، مرکز ارتفاعی بر مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ارتفاعی منطبق است.

از بررسی شکل و ازبرابری زاویه‌های HDF و DBO نتیجه می‌شود که FD بر OB و همچنین DE بر OC و بالاخره EF بر OA عمود است.

تَمْرِ يَنْهَا

۱- در شکل (۱.۶، الف) ثابت کنید که مثلث‌های ABC و DEC ، BDF ، AEF با هم متشابه‌اند.

۲- مثلثی با يك زاویه متفرجه در نظر گرفته و خطهای نظیرشکل (۶.۱، الف) را روی آن رسم کنید. با بررسی شکل حاصل معلوم کنید که کدام يك از خاصیت‌هایی که قبلاً بدست آمد باز هم صادق است.

۳- ثابت کنید که اگر يك زاویه از مثلثی منفرد باشد، مرکز ارتفاعی آن بر مرکز یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ارتفاعی منطبق است.

۴- ثابت کنید که :

$$\widehat{HAO} = |B - C|$$

۷.۱- مثلث میانه‌ای و خط اولر

مثلثی را که رأسهایش وسطهای ضلعهای مثلث، یعنی پاهای میانه‌های مثلث، می‌باشند مثلث میانه‌ای آن مثلث می‌نامیم. در شکل (۷.۱، الف) که A' وسط BC و B' وسط CA و C' وسط AB است، مثلث $A'B'C'$ مثلث میانه‌ای مثلث ABC است.

مرکز ثقل مثلث ABC ، یعنی نقطه تلاقی میانه‌های AA' و BB' را با G و مرکز ارتفاعی آن را با H و مرکز ارتفاعی مثلث $A'B'C'$ را با O نشان می‌دهیم.

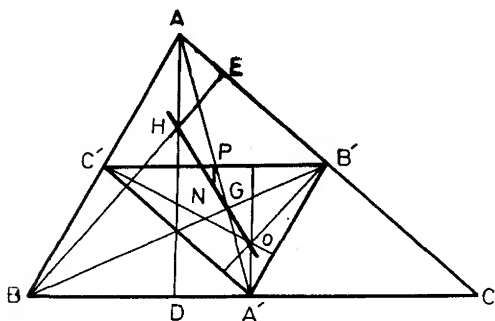
از بررسی شکل برمی‌آید که ضلعهای مثلث میانه‌ای به ترتیب با ضلعهای مثلث موازیند و طول هر ضلع از مثلث میانه‌ای نصف طول ضلع نظیر از مثلث است.

پاره خطهای $A'B'$ و $C'A'$ ، $B'C'$ ، $A'B'$ و $C'A'$ ، مثلث ABC را به چهار مثلث متساوی تقسیم می‌کنند. چهار گوشه $AC'A'B'$ متوازی‌الاضلاع است و دو قطر AA' و $B'C'$ از آن منصف یکدیگرند. از اینرو میانه‌های مثلث ABC در عین حال میانه‌های مثلث $A'B'C'$ بوده و G مرکز ثقل هر یک از دو مثلث ABC و $A'B'C'$ می‌باشد.

ارتفاعهای مثلث $A'B'C'$ عمود منصفهای ضلعهای مثلث ABC می‌باشند. از اینرو O که مرکز ارتفاعی مثلث $A'B'C'$ است مرکز دایره محیطی مثلث ABC است. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به نسبت ۲ متشابهند و نتیجه می‌شود که $AH = 2OA'$ و چون $AG = 2GA'$ پس دو مثلث AHG و $GA'O$ به نسبت ۲ متشابهند و نتیجه می‌شود که سه نقطه O و G و H بر یک خط راست واقعند و $HG = 2GO$. بنابراین:

قضیه ۱۰۷.۱- در هر مثلث، مرکز ارتفاعی، مرکز ثقل و مرکز دایره محیطی بر یک خط راست واقعند و پاره خط بین مرکز ارتفاعی و مرکز دایره محیطی توسط مرکز ثقل به نسبت ۲ بر ۱ تقسیم می‌شود.

خطی که بر مرکزهای ارتفاعی، ثقل و دایره محیطی می‌گذرد خط اولر نام دارد. از P وسط $B'C'$ عمودی بر این خط رسم می‌کنیم که HO را در N قطع



(شکل ۷.۱، الف)

می‌کند. سه خط AH و PN و $A'O$ که بر $B'C'$ عمودند متوازی‌اند و نتیجه می‌شود که N وسط HO است. به روش مشابه ثابت می‌شود که عمود منصف‌های ضلع‌های $A'B'$ و $C'A'$ نیز از N می‌گذرند. پس N مرکز دایره محیطی مثلث $A'B'C'$ است.

خلاصه آنکه، مرکز دایره محیطی مثلث میانه‌ای هر مثلث در وسط HO از خط اولر مثلث اصلی واقع است. همچنین هر مثلث با مثلث میانه‌ای خود به نسبت ۲ بر ۱ متشابه است و شعاع دایره محیطی مثلث میانه‌ای نصف شعاع دایره محیطی مثلث اصلی است.

اکنون که نام اولر پیش آمد بدنیست که کمی درباره‌ی وی صحبت شود، به ویژه آنکه در همه شاخه‌های ریاضی و در بسیاری از موردها نام او به میان می‌آید. لئونارد اولر^۱ به سال ۱۷۰۷ در بال به دنیا آمد. در سال ۱۷۲۷ در آکادمی سن پترزبورگ پذیرفته شد. در سال ۱۷۴۱ عازم برلین شد تا کرسی ریاضیات آکادمی پروس را می‌عاهده گیرد. در سال ۱۷۶۶ به سن پترزبورگ بازگشت و تا سال مرگش، ۱۷۸۳، در آنجا مقیم بود. اولر به طور خستگی ناپذیر کار می‌کرد. در پرتو کوشش‌های او ریاضیات در همه زمینه‌ها توسعه یافت. در هر شاخه‌ای از ریاضیات، یا فرمولی، یا قضیه‌ای، یا اینکه روشی به نام اولر وجود دارد. تعداد یادداشتهایی از وی که در زمان حیاتش چاپ شد ۴۷۳ بود و کمی بعد از مرگش ۲۰۰ یادداشت و بالاخره کمی دیرتر از آن ۶۱ یادداشت از وی چاپ شد. اما همه کارهای او در شرایط دشوار انجام می‌گرفت، زیرا در سال ۱۷۳۵ بینائی یک چشمش را از دست داد و در سال ۱۷۶۶ بطور کلی کور شد.

مهارت اولر در محاسبه‌ها شگفت‌انگیز و درک شهودیش در ریاضیات معجزه‌آسا بود. در این کتاب بارهای دیگر با نام اولر روبرو خواهیم شد.

تمرین‌ها

- ۱- ثابت کنید که قضیه (۱۰۷.۱) برای مثلث با زاویه منفرجه نیز صادق است.
- ۲- در مثلث ABC (شکل ۷.۱، الف) ثابت کنید که:

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

- ۳- همچنین ثابت کنید که:

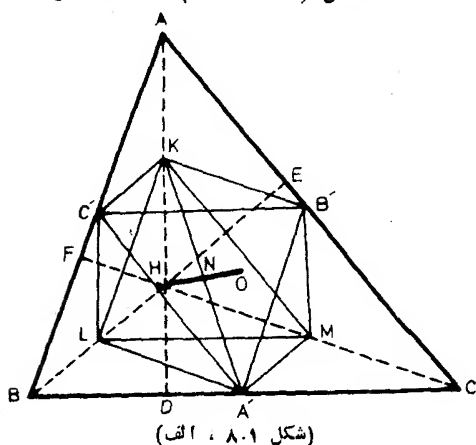
$$DA' = \frac{|b^2 - c^2|}{2a}$$

۴- ثابت کنید که اگر در مثلثی خط او را با BC موازی باشد خواهیم داشت:

$$tg Btg C = 3$$

۸.۱- دایره نه نقطه

برای پرهیز از درهمی شکل بعضی از خطهای شکل (۷.۱، الف) را حذف کرده و



خطهای تازه ای به آن اضافه می کنیم تا شکل (۸.۱، الف) بدست آید. در این شکل K و L و M به ترتیب وسطهای پاره ارتفاعهای AH و BH و CH می باشند. مثلثهای ABC و HBC در ضلع BC مشترکند از اینرو پاره خطهای $B'C'$ و LM با هم برابر و موازیند؛ زیرا هر کدام از

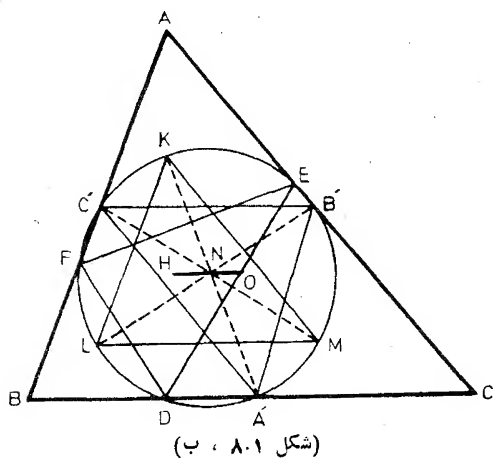
آنها با BC موازی است و با نصف BC برابر می باشد. پس چهار گوشه $B'C'LM$ متوازی الاضلاع است و چون AH بر BC عمود است و LC' و MB' با AH موازیند (در مثلثهای CAH و BAH)، پس LC' و MB' بر BC و در نتیجه بر $B'C'$ و LM عمودند. بنابراین چهار گوشه $B'C'LM$ مستطیل است. به روش مشابه ثابت می شود که هر یک از چهار گوشه های $A'B'KL$ و $C'A'MK$ نیز مستطیل است. از اینرو پاره خطهای $A'K$ و $B'L$ و $C'M$ قطرهایی از دایره ای هستند که بر رأسهای این مستطیلها می گذرد. اما زاویه $A'DK$ قائمه است و دایره به قطر $A'K$ بر D می گذرد. همچنین دایره به قطر $B'L$ بر E و دایره به قطر $C'M$ بر F می گذرد (شکل ۸.۱، ب). بنابراین قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱۰۸.۱- در هر مثلث، وسطهای سه ضلع، پاهای ارتفاعها، وسطهای پاره خطهایی که رأسها را به مرکز ارتفاعی وصل می کنند، نه نقطه اند واقع بر یک دایره که شعاع این دایره، که همان شعاع دایره محیطی مثلث میانه ای است، نصف شعاع دایره محیطی مثلث، یعنی برابر با $\frac{R}{2}$ است.

ژان ویکتور پونسله این دایره را دایره نه نقطه نامیده است که اکنون نیز به همین

نام معروف است. اما آن را دایرهٔ اولر نیز می‌نامند.

در دایرهٔ نه نقطه سه نقطه L, K, M به ترتیب با سه نقطه A', B', C' در دو سربك قطار واقعند، به قسمی که مثلثهای KLM و $A'B'C'$ از روی یکدیگر با دوران حول مرکز دایره به زاویه 180° بدست می‌آیند. در این تبدیل دو مثلث، مرکزهای ارتفاعی آنها



یعنی H و O با یکدیگر جابجا می‌شوند. بنابراین مرکز دایرهٔ نه نقطه در وسط پاره خط OH واقع است که آن را N می‌نامیم. پس می‌توان گفت:

قضیهٔ ۱-۲۰۸۰- دهر مثلث، مرکز دایرهٔ نه نقطه روی خط اولر واقع است و از مرکز ارتفاعی و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث به یک فاصله است.

سرگذشت دو قضیهٔ بالا به درستی روشن نیست. با توجه به مسئله‌ای که از طرف ب. بوان^۱ به سال ۱۸۵۴ در مجله‌ای انگلیسی چاپ شده است بنظر می‌رسد که این قضیه‌ها در آن عصر شناخته شده بوده‌اند. اینکه آنها را به ناروا به اولر نسبت می‌دهند به این جهت است که وی برای نخستین بار در ۱۷۶۵ ثابت کرده است که دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعی بر دایرهٔ محیطی مثلث میانه‌ای منطبق است. در حقیقت اغلب از نویسندگان اروپائی از «دایرهٔ اولر» نام می‌برند. ظاهراً اثبات کامل قضیه برای نخستین بار در سال ۱۸۲۱ توسط پونسله منتشر شده است. خیلی دیرتر از آن، فوئرباخ^۲ همان استنباط جزئی اولر را از نو بدست آورد و علاوه بر آن خاصیت مهم و جالب جدیدی را نیز دریافت. از اینرو بسیاری از نویسندگان دایرهٔ نه نقطه را «دایرهٔ فوئرباخ» می‌نامند. بنابه قضیهٔ فوئرباخ در بخش پنجم بیان خواهیم کرد که دایرهٔ نه نقطه بر دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث مماس است.

تمرینها

۱- بنابه شکل (۸.۱، الف) ثابت کنید که چهار گوشهٔ $AKA'O$ متوازی الاضلاع است.

۲- ثابت کنید که روی دایرهٔ نه نقطه، سه نقطه K و L و M به ترتیب در وسطهای

کمانهای DE و FD و EF واقعند.

۳- هرگاه I_a ، I_b و I_c مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC باشد، ثابت کنید که دایره محیطی مثلث ABC همان دایره نه نقطه مثلث $I_a I_b I_c$ است.

۴- سه دایره باهم برابر و در نقطه P مشترکند و دوبعدی در سه نقطه A و B و C باهم برخورد دارند. ثابت کنید که دایره محیطی مثلث ABC با این دایره‌ها برابر است و P مرکز ارتفاعی این مثلث است.

۵- ثابت کنید که دایره نه نقطه مثلث، ضلعهای آن را تحت زاویه‌های $|B-C|$ ، $|A-B|$ و $|C-A|$ قطع می‌کند.

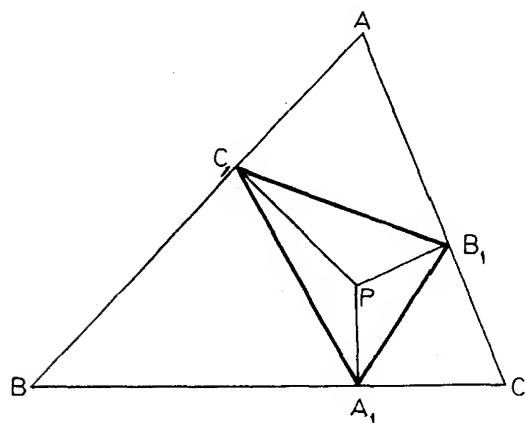
۹.۱- مثلشهای عمودی (= مثلشهای پودر (Podaire)

دیدیم که مثلث ارتفاعی يك مثلث یعنی مثلثی که رأسهایش پاهای ارتفاعهای آن مثلث می‌باشد، مثلث میانه‌ای یعنی مثلثی که رأسهایش میانه‌های آن مثلث می‌باشد. اکنون مثلثی را در يك مثلث مفروض در نظر می‌گیریم که رأسهایش پاهای عمودهایی هستند که از يك نقطه داخلی بر سه ضلع مثلث رسم شده‌اند. این مثلث را مثلث عمودی، یا مثلث پودر، نظیر آن نقطه نسبت به مثلث

مفروض می‌نامیم.

در شکل (۹.۱، الف) نقطه

P در درون مثلث ABC اختیار شده و عمودهای PA_1 ، PB_1 و PC_1 به ترتیب بر ضلعهای BC ، CA و AB رسم شده‌اند. مثلث $A_1 B_1 C_1$ مثلث عمودی نقطه P نسبت به مثلث ABC می‌باشد. می‌توان قید بودن نقطه P در درون مثلث را کنار گذاشت به شرط



(شکل ۹.۱، الف)

آنکه P روی دایره محیطی مثلث نباشد (در این باره در بند ۵.۲ بحث خواهد شد). اگر P بر مرکز ارتفاعی یا بر مرکز دایره محیطی مثلث واقع باشد، مثلشهای عمودی نظیر آن به ترتیب مثلث ارتفاعی و مثلث میانه‌ای خواهد بود.

اکنون به بررسی شکل بپردازیم. چهار گوشه $AB_1 PC_1$ در دایره به قطر AP محاط است، پس P بر دایره محیطی مثلث $AB_1 C_1$ واقع است. بنا به قانون سینوسها در دو مثلث ABC و $AB_1 C_1$ داریم:

$$\frac{B_1C_1}{\sin A} = AP \quad \text{و} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

از این دورابطه نتیجه می‌شود:

$$B_1C_1 = \frac{a \cdot AP}{2R}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$C_1A_1 = \frac{b \cdot BP}{2R} \quad \text{و} \quad A_1B_1 = \frac{c \cdot CP}{2R}$$

این نتیجه‌ها را می‌توانیم به صورت قضیه زیر بیان کنیم:

قضیه ۹.۱-۱ هرگاه نقطه P به فاصله‌های x و y و z از سه رأس مثلث ABC واقع باشد، اندازه‌های ضلعهای مثلث عمودی نقطه P نسبت به مثلث ABC برابرند با:

$$\frac{ax}{2R}, \quad \frac{by}{2R}, \quad \frac{cz}{2R}$$

حالت خاص $x=y=z=R$ را خوب می‌شناسیم.

در نظر گرفتن مثلثهای عمودی متوالی نظیر یک نقطه برای یک مثلث مفروض، علاوه بر آنکه تمرینی جالب است مثالی دلفریب از تصور در هندسه است. بنظر می‌آید که این موضوع جالب برای نخستین بار توسط زیورگت^۱ به عنوان ضمیمه‌ای بر چاپ ششم کتاب «دنباله‌ای بر شش مقاله اول تحریرات اقلیدس» تألیف جان کازی^۲ مطرح شده است. در شکل (۹.۱، ب) نسبت به مثلث ABC و نظیر نقطه P مثلث $A_1B_1C_1$ عمودی اول، مثلث $A_2B_2C_2$ عمودی دوم و مثلث $A_3B_3C_3$ عمودی سوم می‌باشد. برای مثلث عمودی سوم خاصیت زیر بیان شده است:

قضیه ۹.۱-۲ مثلث عمودی سوم با مثلث مفروض متشابه است:

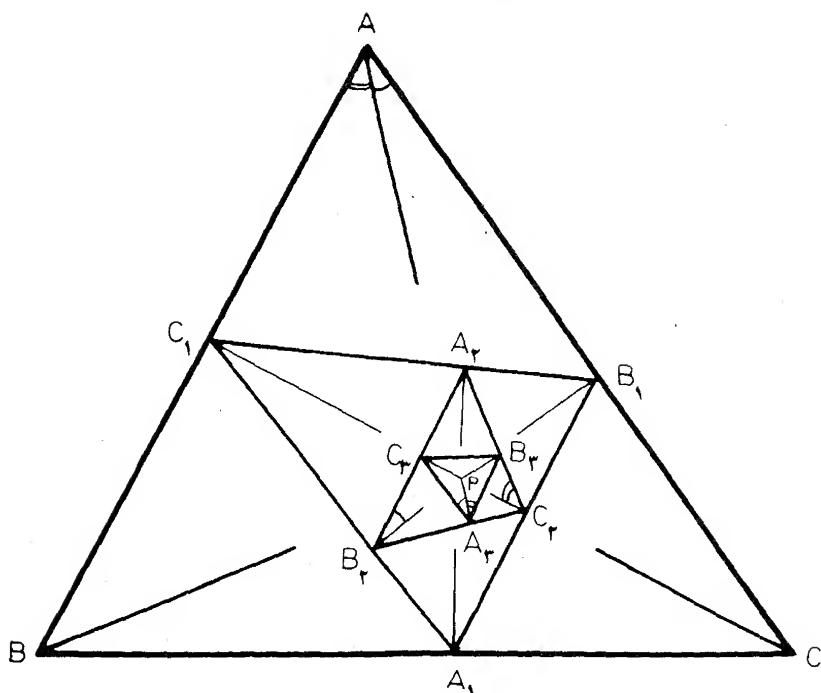
$$\triangle ABC \sim \triangle A_3B_3C_3$$

اثبات این قضیه از سادگی شگفت‌انگیزی برخوردار است؛ چون P بردایره‌های محیطی مثلثهای AB_1C_1 ، $A_2B_2C_2$ ، $A_3B_3C_3$ ، $A_1B_1C_1$ و $A_3B_3C_3$ واقع است. پس:

$$\widehat{C_1AP} = \widehat{C_1B_1P} = \widehat{A_2B_1P} = \widehat{A_2C_2P} = \widehat{B_2C_2P} = \widehat{B_2A_3P}$$

$$\widehat{PAB_1} = \widehat{PC_1B_1} = \widehat{PC_1A_2} = \widehat{PB_2A_2} = \widehat{PB_2C_3} = \widehat{PA_3C_3}$$

نتیجه می‌شود دوجزئی که از زاویه A پدید آمده است با دوجزئی که از زاویه A_3 پدید



(شکل ۹.۱ ب)

آمده است باهم برابرند، پس دوزاویه A و A_3 باهم برابرند. همچنین ثابت می‌شود که \hat{B} با \hat{B}_3 و \hat{C} با \hat{C}_3 برابر است، بنابراین دو مثلث ABC و $A_3B_3C_3$ متشابهند. اثبات تساوی دوزاویه A و A_3 از راه تساوی اجزاء A با جزءهایی از B_1 و C_1 ، سپس با جزءهایی از B_2 و C_2 انجام گرفت. این جزءهای متساوی در روی شکل با کمانکها نموده شده‌اند. تعقیب رشته این برابریها در روی شکل و چگونگی رسیدن از A به A_3 بسیار جالب است و همانند حرکت باله يك دسته به هم پیوسته بنظر می‌آید.

دکتر ادین هیم^۱ معاون دانشگاه مانزی در سنگاپور، خاصیت بالا را برای مثلثهای عمودی متوالی تعمیم داده است. وی به جای مثلث n ضلعی در نظر گرفته و به این نتیجه رسیده است که n ضلعی عمودی مرتبه n ام با آن متشابه است. اثبات این خاصیت در حالت $n=4$ بسیار جالب است.^۲

۱- A.Oppenheim

۲- یادداشت از ج. غیور؛ یکی از خواص مهم و معروف مثلث عمودی نقطه P نسبت به مثلث مفروض، رابطه‌ای است که بین مساحت مثلث عمودی و قوت نقطه P نسبت به دایره

در اینجا بخش نخست کتاب پایان می‌یابد. در این بخش با شروع از برخی چیزهای شناخته شده به نتیجه‌هایی ساده اما مهم دست یافتیم. مسئله‌های بسیاری یافت می‌شود که حل آنها با روش بالا انجام می‌گیرد، و انگهی برخی از آنها معماهایی می‌باشند که شاید عده‌ای از خوانندگان با آنها آشنایی داشته باشند. در زیر پنج نوع از این مسئله‌ها به عنوان تمرین آورده شده است.

تمرین‌ها

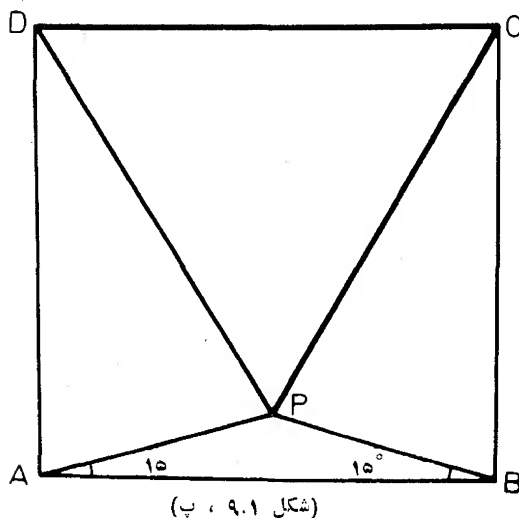
۱- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. خطی از A می‌گذرد و

با ضلع BC در Q و با دایره C محیطی مثلث در P برخورد می‌کند. ثابت کنید که:

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$$

۲- در داخل مربع ABCD

از A و B دو خط رسم می‌کنیم که با ضلع AB زاویه ۱۵ درجه بسازند. این دو خط در P برخورد می‌کند. ثابت کنید که P و C و D سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاعند.



(شکل ۹.۱، پ)

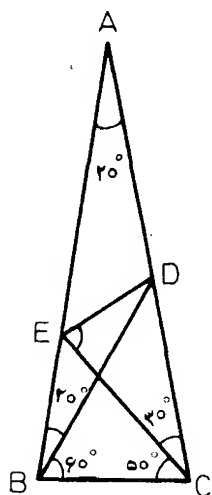
۳- نقطه P در خارج متوازی‌الاضلاع ABCD واقع شده است به قسمی که دو زاویه PBC و PDC با هم برابرند. ثابت کنید که دو زاویه APD و BPC با هم برابرند (شکل ۹.۱، ت).

۴- در مثلث متساوی‌الساقین ABC اندازه هر یک از زاویه‌های B و C برابر ۸۰ درجه است. از B خطی رسم می‌کنیم که با AC در D برخورد کند و زاویه DBC به اندازه ۶۰ درجه باشد. همچنین از C خطی رسم می‌کنیم که با AB در E برخورد

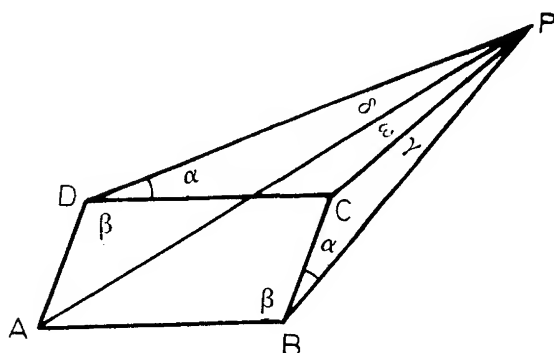
محیطی مثلث مفروض وجود دارد: اگر S_1 مساحت مثلث عمودی نظیر نقطه P و S و R به ترتیب مساحت وشاع دایره محیطی مثلث مفروض و P قوت نقطه P نسبت به این دایره باشد، داریم:

$$S_1 = \frac{S}{4R^2} P$$

کند و زاویه ECB به اندازه ۵۰ درجه باشد. اندازه زاویه DEC را بدست آورید (شکل ۹.۱، ت).



(شکل ۹.۱، ت)



(شکل ۹.۱، ت)

۵- مثلث ABC متساوی الاضلاع است. به قطر AC در بیرون مثلث نیمدایره ای رسم می کنیم. از رأس B دو خط چنان رسم می کنیم که این نیمدایره را به سه کمان برابر با هم بخش کنند. ثابت کنید که این دو خط پاره خط AC را نیز به سه پاره برابر با هم بخش می کنند.

برخی ویژگیهای دایره

هرچند مطالعات یونانیها در هندسه و همچنین در سایر زمینه‌های گوناگون ریاضی، عمیقانه بوده‌است، اما امروزه در همهٔ مراحل، حتی در هندسه، بر آنان پیشی گرفته‌ایم.

ف. کلین

در طول سده‌ها، دایره به‌بهترین وجه مورد توجه بوده است. به‌ویژه که به‌عنوان یک شکل کامل بر منجمان، و بیشتر از آن بر فیلسوفان، اثر داشته است. پیش از آنکه قانونهای کپلر بیان شود برای انسان باور کردنی نبود که مسیر حرکت سیاره‌ها غیر از دایره باشد. اگر امروزه در معنی لفظهایی مانند «مربع»، «خط» و از این قبیل، گاهی تردید پیش می‌آید، اما دایره هیچگاه چنین نبوده است، زیرا مفهوم آن فارغ از وسواسهای مجرد و شبه‌علمی و در خور اعتباری که لازمهٔ آن بوده همواره ثابت و مشخص بوده است.

از اقلیدس به بعد خاصیت‌های جالب بسیاری مربوط به دایره، و مثلثها و چندضلعیهای وابسته به آن، کشف و بیان شده است، اما در اینجا به علت تنگی جا ذکر همهٔ آنها ممکن نیست.

۱.۲- قوت نقطه نسبت به دایره

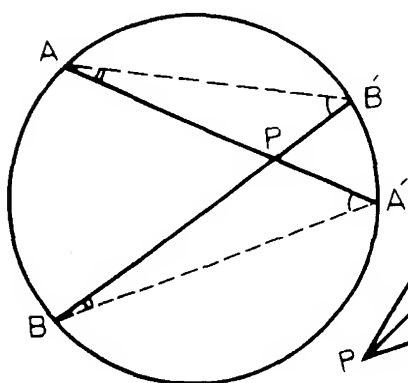
نخست بسايد دو قضيه از هندسهٔ اقلیدسی را یادآوری کنیم. یکی از این قضیه‌ها مربوط است به حاصل ضرب دو قطعه‌ای که دووتر از دایره در یکدیگر بوجود می‌آورند (اگر دووتر AB و CD از دایره‌ای در P متقاطع باشند داریم $PA \cdot PB = PC \cdot PD$). قضیهٔ دیگر مربوط است به حاصل ضرب دو قطعهٔ قاطعی که از نقطهٔ خارج دایره بر آن رسم می‌شود و مجدداً در طول مماس مرسوم از این نقطه بر دایره (هرگاه از نقطهٔ P واقع در خارج

دایره، مماس PT را بردایره رسم کنیم و نیز قاطعی رسم کنیم که بادایره در A و A' برخورد کند. داریم $(PT)^2 = PA \cdot PA'$.

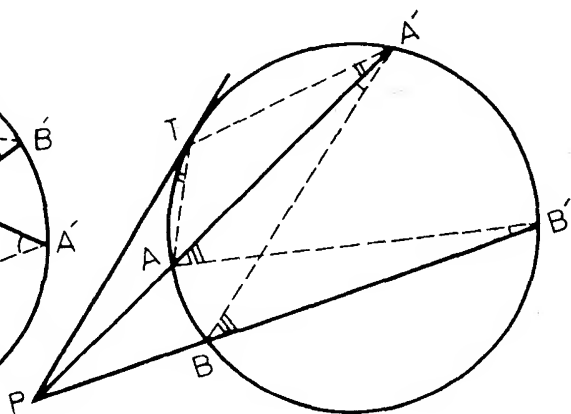
با توجه به اینکه مماس بردایره را می توان حد قاطع بر آن دانست، همهٔ ویژگیهای بالا را می توان زیر عنوان يك قضیه به شرح زیر بیان کرد:

قضیه ۱۰۲-۱- هرگاه از نقطه P دو خط بگذرد که اولی دایره مفروض را در A و A' (ممکن است این دو نقطه منطبق باشند) و دومی آن دایره را در B و B' (ممکن است این دو نقطه منطبق باشند) قطع کند، داریم:

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$$



(شکل ۱۰۲، الف)



(شکل ۱۰۲، ب)

برای اثبات، کافی است توجه کنیم که دو مثلث PAB' و PBA' متشابهند و در نتیجه:

$$\frac{PA}{PB'} = \frac{PB}{PA'}$$

در حالتی که یکی از دو خط بردایره مماس باشد، غیر از آنکه می توان مماس را حد قاطع دانست، می توان از تشابه دو مثلث PAT و PA'T نیز نتیجه گرفت که:

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PA'}$$

در هر صورت خواهیم داشت:

$$PA \cdot PA' = PT^2 = PB \cdot PB'$$

هرگاه شعاع دایره با R و فاصله نقطه P تا مرکز دایره با d نموده شود، می توان BB' را چنان اختیار کرد که قطر دایره باشد. در این صورت اگر P خارج دایره باشد داریم:

$$\overline{PT}^2 = PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = (d+R)(d-R) = d^2 - R^2$$

و اگر P داخل دایره باشد:

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = (R+d)(R-d) = R^2 - d^2$$

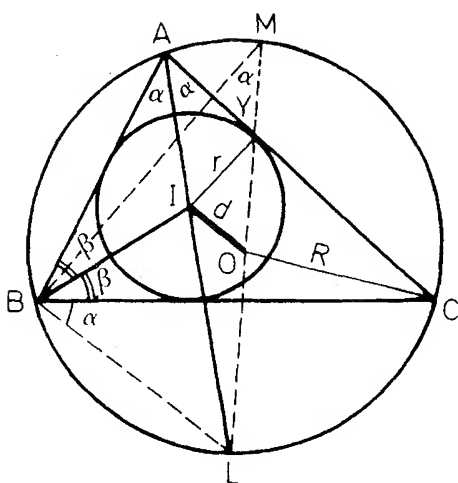
با استفاده از رابطه بالا به بیان و اثبات قضیه اولر می پردازیم و آنگاه قوت نقطه

نسبت به دایره را تعریف می کنیم.

قضیه ۱۰۲، ۲ - هرگاه O مرکز دایره محیطی، I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث

ABC، فاصله این دو مرکز R و r به ترتیب شعاعهای دایره های مزبور باشد، داریم:

$$d^2 = R^2 - 2rR \quad \text{دایره اولر:}$$



(شکل ۱۰۲، پ)

برای اثبات، هرگاه AI نیمساز

زاویه A را امتداد دهیم تا با دایره

محیطی مثلث در L برخورد کند و

قطر LM از این دایره را رسم

کنیم، چون L وسط کمان BC

است پس قطر LM عمود منصف BC

می باشد. نصف زاویه A را با alpha

و نصف زاویه B را با beta نشان

می دهیم. از روی شکل ملاحظه می شود

که:

$$\widehat{BML} = \widehat{BAL} = \alpha$$

$$\widehat{LBC} = \widehat{LAC} = \alpha \quad \text{و}$$

زاویه BIL زاویه خارجی مثلث ABI است، پس،

$$\widehat{BIL} = \alpha + \beta = \widehat{LBI}$$

بنابراین مثلث LBI متساوی الساقین است و LB = LI و نسبت به دایره محیطی

مثلث داریم:

$$R^2 - d^2 = LI \cdot IA = LB \cdot IA = LM \left(\frac{LB}{LM} \right) : \left(\frac{LY}{IA} \right) IY$$

$$= (LM \cdot \sin \alpha) : \left(\frac{\sin \alpha}{IY} \right) = LM \cdot IY = 2rR$$

$$d^2 = R^2 - 2rR$$

تعریف - هرگاه نقطه P به فاصله d از مرکز دایره به شعاع R واقع باشد. مقدار $d^2 - R^2$ قوت نقطه P نسبت به دایره می نامند.

اگر P در خارج دایره باشد قوت آن نسبت به دایره مثبت است؛ اگر P روی دایره باشد قوت آن نسبت به دایره صفر است؛ اگر P داخل دایره باشد قوت آن نسبت به دایره منفی است.

هرگاه خطی بر P بگذرد و با دایره در A و A' برخورد کند و این خط را طبق روش نیوتن جهت دار بگیریم به قسمی که $\overline{PA} = -\overline{AP}$ ، در این صورت نقطه P نسبت به دایره در هر وضعی که باشد داریم:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = d^2 - R^2$$

پس قوت نقطه P نسبت به دایره برابر است با: $\overline{PA} \cdot \overline{PA'}$
در اینجا یادآوری می شود که اصطلاح قوت نقطه نسبت به دایره نخستین بار توسط اشتینر بکار رفته است.

تمرینها

- ۱- کمترین مقدار جبری قوت نقطه نسبت به دایره چقدر است؟ نقطه نظیر این کمترین مقدار کدام است؟
- ۲- مکان هندسی نقطه هایی که قوت آنها نسبت به دایره ثابت مقدار ثابت بزرگتر از R^2 است چیست؟
- ۳- اگر قدر مطلق قوت نقطه نسبت به دایره برابر t^2 باشد. تعبیر هندسی طول t چیست؟
- ۴- دو دایره هم مرکز داده شده است. از نقطه P مماس PU را بر دایره بیرونی و مماس PT را بر دایره درونی رسم می کنیم. خط PT با دایره بیرونی در Q برخورد می کند. ثابت کنید که:

$$\overline{PT}^2 - \overline{PU}^2 = \overline{QT}^2$$

- ۵- ثابت کنید که در هر مثلث شعاع دایره محیطی از دو برابر شعاع دایره محاطی داخلی بزرگتر یا اقل با آن برابر است.
- ۶- قوت مرکز دایره محاطی داخلی مثلث را نسبت به دایره محیطی آن بر حسب R و r بدست آورید.
- ۷- با در نظر گرفتن خطهای جهت دار، قضیه استوارت را به شرح زیر ثابت کنید (قبلا در تمرین ۴ از بند ۲۰۱ نیز بیان شده است): اگر A و B و C سه نقطه واقع

بريك خط راست و P نقطه دلخواه باشد، داریم:

$$\overline{PA^2} + \overline{PB^2} + \overline{PC^2} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$$

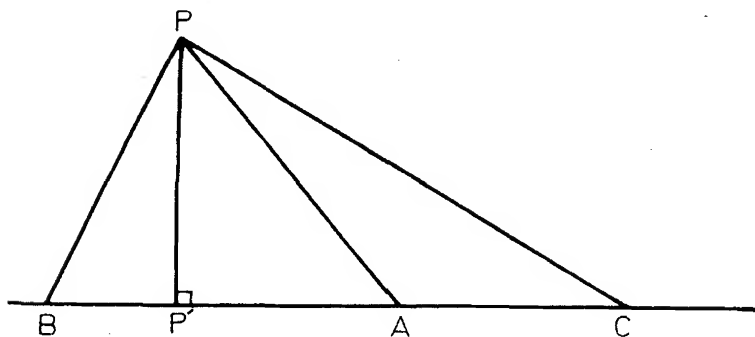
[یادداشت از ح. غیور: این مسئله صورت کامل قضیه استوارت است که با تغییر مختصر یعنی تقسیم دوطرف رابطه بر $\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}$ به صورت زیر درمی آید که از انسجام بیشتری برخوردار است و بهتر در حافظه می ماند:

$$\frac{\overline{PA^2}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{\overline{PB^2}}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}} + \frac{\overline{PC^2}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = 1$$

این قضیه به این شکل موارد استعمال گسترده ای در هندسه دارد و یکی از اساسی ترین قضیه های هندسه اقلیدسی است.

برای این قضیه علاوه بر راه حلی که به وسیله مؤلفان در آخر کتاب ارائه شده است با روش زیر به کمک دوقضیه اساسی هندسه، یعنی قضیه های فیثاغورس و شال (در باره پاره خطهای جهت دار روی محور) ثابت می شود: از P عمود PP' را بر راستای AB فرود می آوریم و رابطه استوارت را برای P' می نویسیم:

$$\frac{\overline{P'A^2}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{\overline{P'B^2}}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}} + \frac{\overline{P'C^2}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = 1$$



هرگاه اندازه های \overline{AB} ، \overline{BC} و \overline{CA} را نسبت به مبدأ P' بنویسیم، این رابطه به يك اتحاد ساده جبری بدل می شود.

برای اثبات حکم در حالت کلی می توان با استفاده از قضیه فیثاغورس رابطه بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\overline{PA^2} - \overline{PP'^2}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} + \frac{\overline{PB^2} - \overline{PP'^2}}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}} + \frac{\overline{PC^2} - \overline{PP'^2}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = 1$$

چون هر يك از سه کسر را به دو کسر تفکیک کنیم و سه کسری را که صورت آنها

$\overline{PP'}$ است به طرف راست ببریم، با استفاده از رابطه شال رابطه استوارت بدست می آید.]

۸- خطی بر G مرکز ثقل مثلث ABC می گذرد و ضلعهای این مثلث را در X, Y, Z قطع می کند. ثابت کنید که:

$$\frac{1}{GX} + \frac{1}{GY} + \frac{1}{GZ} = 0$$

۹- ارتفاع کوهی از سطح زمین ۱۶۰۹ متر است. قطر کره زمین را $۱۲۷۴۳/۳$ کیلومتر می گیریم. اگر در قله این کوه باشیم افق را به چه شعاع می بینیم؟

۲.۲- محور اصلی دودایره

ادیك تمپل بل^۱ در یکی از کتابهایش به نام «مردان ریاضیات»^۲ چنین نقل کرده است: شاهزاده خانم الیزابت به هنگام اقامتش در خارج از بوهم موفق شد که با استفاده از مختصات، مسئله ای از هندسه مقدماتی را حل کند. در صورتی که دندکات^۳ فیاسوف و ریاضیدان معروف که معلم این شاهزاده خانم بسوده اظهار داشته است که خودش برای حل آن مسئله يك ماه تلاش کرده و توفیتی نیافته است. بل می گوید که «این نمونه ای خوب از آن مسئله ها است که در حل آنها به صورت غیر مستقیم از هندسه مختصاتی استفاده می شود».

[یادآوری این نکته لازم است که دکارت را واضع هندسه تحلیلی می شناسند. اما به گمانی پدرفرها^۴ واضع هندسه تحلیلی بوده و در نامه ای برای دکارت اصول آن را شرح داده است.]

ممکن است که حل يك مسئله با روش معین بهترین یا سریعترین راه حل آن نباشد. قضیه ای که در زیر بیان می شود از هردوره هندسه ناب و هندسه تحلیلی اثبات می شود که هیچکدام مشکلتر از دیگری نیست. اما با استفاده از روش تحلیلی برخی نتیجه های جالب از آن بدست می آید.

قضیه ۱۰۲۰۲- مکان هندسی نقطه هایی که نسبت به دو دایره با مرکزهای متفاوت قوتهای برابر دارند، خطی است (است عمود بر خط المרכזین آن دو دایره).

روش مختصاتی را بکار می ببریم. اگر d فاصله دو نقطه (x, y) و (a, b)

۱- Eric Templ Bell

۲- این کتاب توسط دکتر حسن صفاری زیر عنوان «ریاضیدانان نامی» به فارسی ترجمه و از طرف مؤسسه انتشارات امیرکبیر چاپ و پخش شده است.

۳- René Descartes.

۴- Pierre Fermat.

باشد داریم:

$$d^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

بنا بر این قوت نقطه (x, y) نسبت به دایره به مرکز (a, b) و به شعاع

r می شود:

$$d^2 - r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$$

که با فرض $a^2 + b^2 - r^2 = c$ این مقدار برابر می شود با:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \quad (1)$$

قوت نقطه (x, y) نسبت به دایره دیگر به مرکز (a', b') و به شعاع r' می شود:

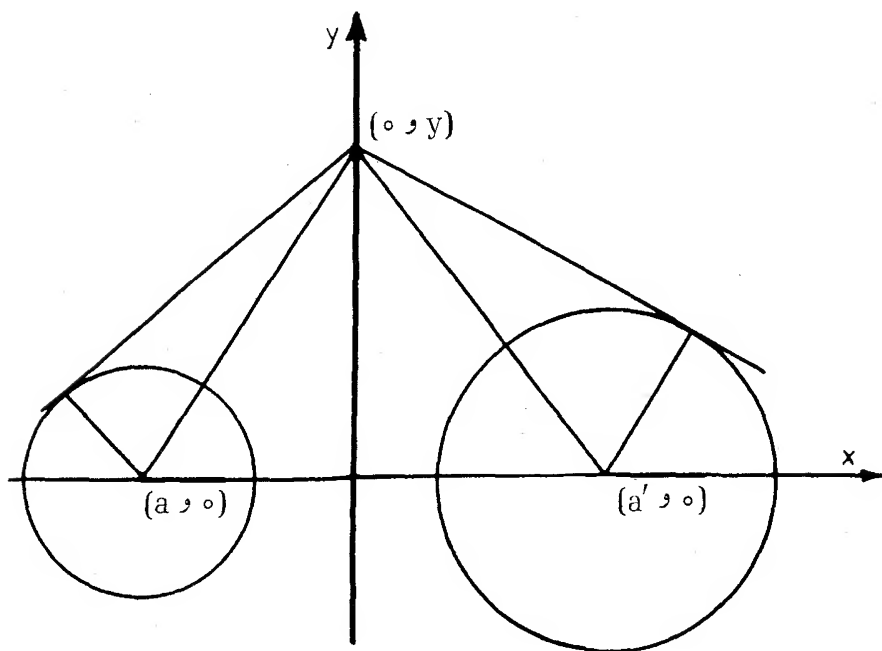
$$x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' \quad (2)$$

از برابری مقادیر (۱) و (۲) معادله مکان هندسی نقطه (x, y) بدصورت زیر

بدست می آید که معادله یک خط راست است:

$$(a' - a)x + (b' - b)y = \frac{1}{2}(c' - c)$$

هرگاه دستگاه مختصات را به گونه ای انتخاب کنیم که محور x ها بر خط المרכזین دو دایره واقع باشد، در این صورت با فرض آنکه $(a, 0)$ و $(a', 0)$ مختصات



(شکل ۲.۲، الف)

مرکزهای دودایره باشد به شرط $a \neq a'$ معادله مکان می شود:

$$x = \frac{c' - c}{2(a' - a)}$$

که خطی است عمود بر محور xx ها، یعنی عمود بر خط الم مرکزین دودایره. در حالت خاص که محور xx ها منطبق بر خط الم مرکزین و محور yy ها منطبق بر مکان مزبور انتخاب شود (شکل ۲.۲، الف)، معادله مکان $x=0$ خواهد بود. در این حالت هر نقطه (بمختصات (x, y)) نسبت به هریک از دودایره دارای قوت $y^2 + c$ می باشد. مکان هندسی نقطه هایی که نسبت به دودایره بامرکزهای متفاوت قوت های برابر دارند، محور اصلی آن دودایره نام دارد.

اگر دودایره متقاطع باشند محور اصلی آنها بر نقطه های تقاطع آنها می گذرد، زیرا هریک از این نقطه ها نسبت به هریک از دودایره قوت برابر صفر دارد. اگر دودایره برهم مماس باشند، محور اصلی آنها آن مماس مشترکی از آنهاست که بر نقطه تماس آنها می گذرد.

تمرینها

۱- مکان هندسی نقطه هایی را بیابید که از آنها دو مماس برابر بر دو دایره داده شده رسم می شود.

۲- دو دایره متخارج چهار مماس مشترك دارند. ثابت کنید که وسطهای این چهار مماس بريك خط راست واقعند.

۳- شش مثلث PAB ،

$Q'AB$ ، $P'AB$ ، RAB ، QAB

$R'AB$ با هم متشابهند و همه در

ضلع AB مشتركند. در شکل

(۲.۲، ب) فقط سه تا از این مثلثها

رسم شده است که سه تاي ديگر از

تقارن نسبت به عمود منصف AB

بدست می آیند. ثابت کنید که رأسهای

این مثلثها که روی AB نیستند،

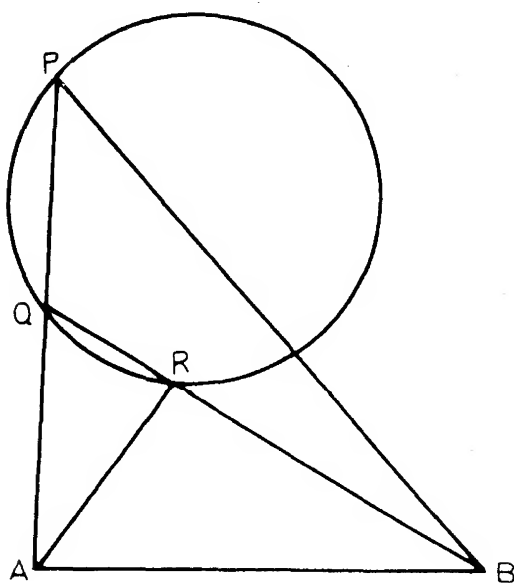
یعنی نقطه های P ، Q ، R ، P' ، Q' و

R' روی يك دایره واقعند.

۴- هرگاه a و b دو مقدار

معلوم باشند، معادله:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$



(شکل ۲.۲، ب)

به ازای چه مقادیر از c يك دایره را مشخص می کند.

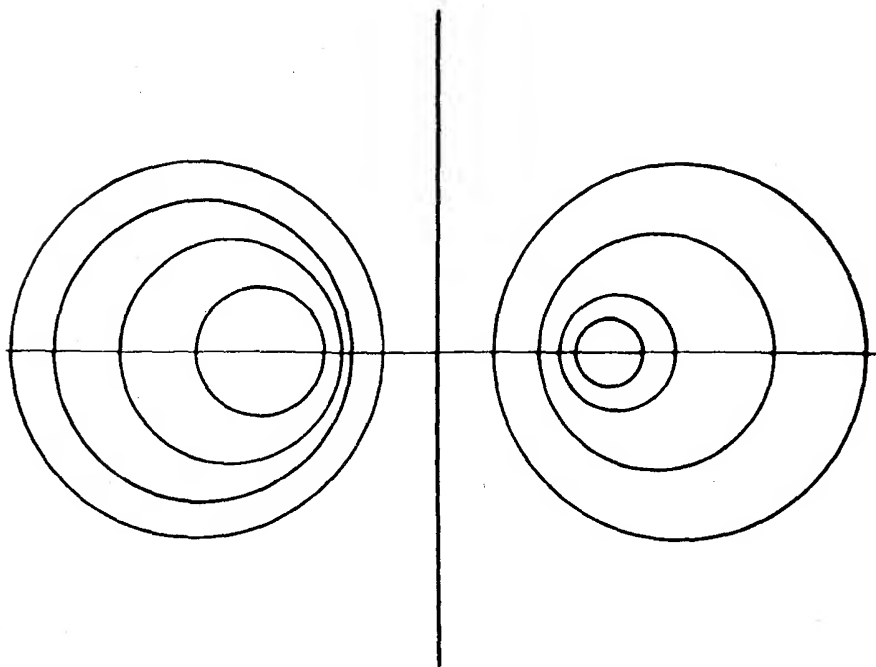
۵- دودایره با مرکزهای متفاوت داده شده است. برای ترسیم محور اصلی آنها روشی بیابید که دودایره در هروضعی نسبت به هم باشند آن روش قابل اعمال باشد.

۳.۲- دسته دایره ها

اگر c مقدار ثابت و a متغیر باشد که همه مقادیر حقیقی، به استثنای مقادیر محصور بین $\pm\sqrt{c}$ به شرط $c > 0$ ، را بتواند قبول کند، معادله:

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0$$

دایره های بیشماری را تعیین می کند که مرکزهای همه آنها بر يك خط راست واقعند و محور اصلی دو به دو از آنها خط ثابت است. این دایره های با این ویژگیها را «دسته دایره ها» می نامند. اگر c منفی باشد همه دایره های دسته محور y ها را در دو نقطه به عرضهای $\pm\sqrt{-c}$ قطع می کنند. در این حالت هر دایره که بر این دو نقطه بگذرد جزء دسته آن دایره ها است. اگر $c = 0$ باشد دسته دایره ها شامل همه دایره هایی است که در مبدأ مختصات بر محور y ها مماسند. در حالتی که $c > 0$ باشد دسته دایره ها مطابق با شکل (۳.۲، الف) می باشد.



(شکل ۳.۲، الف)

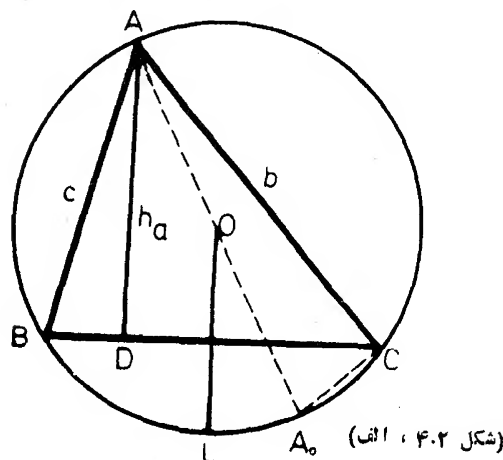
اگر سه دایره چنان باشند که هر سه به يك دسته دایره‌ها متعلق نباشند و دو به دو با مرکزهای متفاوت باشند، دوه دو دارای يك محور اصلی می باشند که روی هم سه محور اصلی برای آنها وجود دارد. اگر دوتا از این سه محور اصلی متقاطع باشند محور اصلی سومي نیز بر نقطه تقاطع آنها می گذرد، زیرا این نقطه نسبت به هر سه دایره دارای يك قوت است. هرگاه دوتا از محورهای اصلی با هم موازی باشند، سومي نیز با آنها موازی است. بنابراین: قضیه ۱،۳،۲- اگر مرکزهای سه دایره داسهای مثلثی باشند، فقط يك نقطه وجود داد که نسبت به هر سه دایره دارای يك قوت است. این نقطه همان نقطه تقارب سه محور اصلی دوه دوی دایره‌ها است و مرکز اصلی سه دایره نام دارد.

تمرینها

- ۱- دودایره در T مماس داخلند. AB وترى از دایره بزرگتر است که بردایره کوچکتر در P مماس است. ثابت کنید که TP نیمساز زاویه ATB است.
- ۲- سه دایره دوه دوی متخارجند و O مرکز اصلی آنها است. از O شش مماس برای دایره‌ها رسم می شود. ثابت کنید که شش نقطه تماس بريك دایره واقعند.

۴.۲- تنتمه در باره ارتفاعها و مرکز ارتفاعی مثلث

در بخشهای گذشته درباره دایره محیطی مثلث گفته‌هایی داشتیم، اما اهمیت این دایره به اندازه‌ای است که گفتگوی دوباره از آن ارزش خواهد داشت. مطابق با شکل



(۴.۲، الف) نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث ABC است که AA قطر این دایره و $OL = R$ شعاعی از آن است که بر BC عمود می باشد و $AD = h_a$ ارتفاع وارد بر BC است. دوزاویه ABC و AA_oC با هم برابرند و در نتیجه دو مثلث ABD و AA_oC متشابهند و داریم:

$$\frac{h_a}{b} = \frac{c}{2R} \Rightarrow h_a = \frac{bc}{2R} \quad (۱۰۴.۲)$$

اکنون اگر دوزاویه متساوی:

$$\widehat{AC} = \widehat{BAD} = \frac{\pi}{2} - B$$

را از زاویه BAC کم کنیم نتیجه می شود:

$$\widehat{DAA} = A - 2\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = A + 2B - (A + B + C) = B - C$$

این رابطه را مطابق با شکل بالا به فرض $B > C$ بدست آوردیم. هرگاه $B < C$ باشد دوزاویه متساوی AC و A و BAD جزء مشترک دارند و در این حالت مقدار زاویه DAO برابر با $C - B$ بدست می آید. بنابراین در حالت کلی داریم:

$$\widehat{DAO} = |B - C| \quad (۲، ۴، ۲)$$

در شکل (۴، ۲، ب) سه ارتفاع AD ، BE و CF از مثلث ABC را امتداد داده ایم تا با دایره محیطی مثلث به ترتیب در D' ، E' و F' برخورد کرده اند و H مرکز ارتفاعی مثلث می باشد. دوزاویه DAB و FCB برابرند زیرا هر کدام متمم زاویه B می باشند. زاویه BCD' نیز با این زاویه ها برابر است، زیرا متمم زاویه D' است و D' با B برابر است. پس دو مثلث قائم الزاویه

CDH و CDD' با هم برابرند و

از آن نتیجه می شود:

$$HD = DD' \quad (۳، ۴، ۲)$$

به روش مشابه نتیجه خواهد شد:

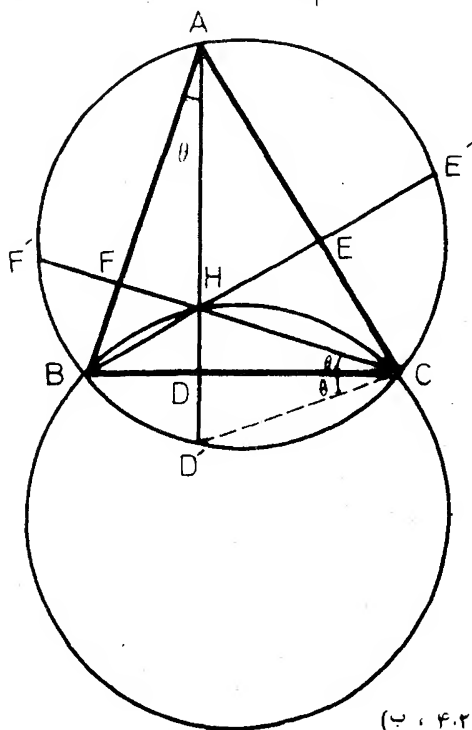
$$HE = EE' \text{ و } HF = FF'$$

چهار گوشه $ABDE$ در دایره به قطر AB محاط است پس بنابه قضیه (۱، ۱، ۲) داریم:

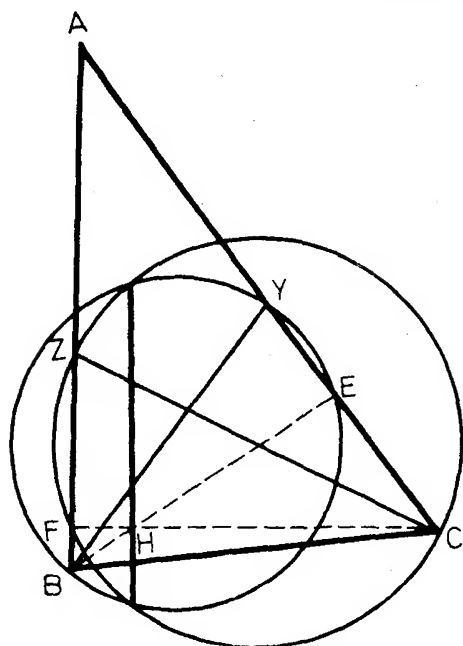
$$HA \times HD = HB \times HE$$

با توجه به اینکه چهار گوشه های $BCEF$ و $CAFD$ نیز محاطی اند و با بدست آوردن رابطه های مشابه، کلاً خواهیم داشت:

$$HA \times HD = HB \times HE = HC \times HF \quad (۴، ۴، ۲)$$



(شکل ۴، ۲، ب)



اکنون نقطه‌های X ، Y و Z را به ترتیب روی ضلعهای BC ، CA و AB در نظر می‌گیریم (روی شکل ۴.۲، پ فقط دو نقطه Y و Z نموده شده است). هرگاه خطهای سوائی AX ، BY و CZ را قطر قرار دهیم و دایره‌هایی رسم کنیم، این دایره‌ها به ترتیب بر D ، E و F پاهای ارتفاعهای مثلث می‌گذرند. پس سه حاصل ضرب رابطه (۴.۲) به ترتیب قوت‌های نقطه H نسبت به این دایره‌ها می‌باشند. چون این سه حاصل ضرب باهم برابرند پس H نسبت به سه دایره مزبور يك قوت

دارد و بنابراین مرکز اصلی سه دایره مزبور می باشد. (شکل ۴.۲ ، پ)

از آنچه گفته شد دو قضیه زیر نتیجه می شود که در دورانیهای مختلف به صورت مسئله هایی بیان می شده اند:

قضیه ۴.۲-۵. هرگاه دو خط سوائی از مثلثی را قطر قرار دهیم ودایره‌هایی (سم‌کنیم) مجبور اصلی دودایرهٔ مرسوم بر H مرکز ارتفاعی مثلث می‌گذرد.

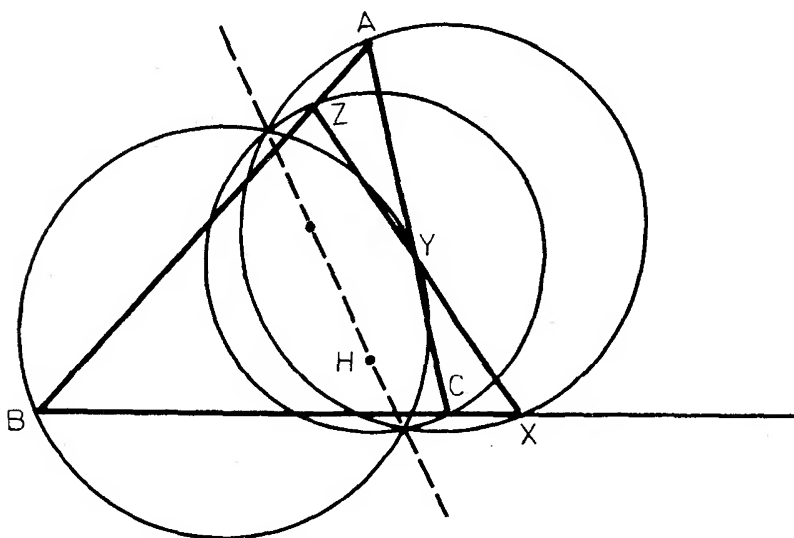
قضیه ۴.۲- هرگاه سه خط سوائی آزمایشی را قطر قرار دهیم و دایره‌هایی رسم کنیم، که به یک دسته دایره‌ها متعلق نباشند، مرکز اصلی این سه دایره همان مرکز ارتفاعی مثلث است.

می‌توانیم نتایج بالا را از راه بیان ساده‌ی زیر بدست آوریم: اگر AD ارتفاع وارد از رأس A در مثلث ABC باشد، هر دو دایره‌ای که قطرهایشان دوخط سوائی وارد از رأس A باشد بر A و D می‌گذرند، حالت خاص دایره‌های به قطرهای AB و AC ، پس این دایره‌ها دسته‌ای تشکیل می‌دهند که AD محور اصلی مشترک آنها است. همچنین ارتفاع وارد از رأس B محور اصلی دسته دایره‌هایی است که قطرهای آنها خطهای سوائی وارد از رأس B می‌باشند. بالاخره، ارتفاع وارد از رأس C محور اصلی دایره‌هایی است که قطرهای آنها خطهای سوائی وارد از رأس C می‌باشند. بنابراین سه ارتفاع در نقطه‌ای متقارند که مرکز اصلی دایره‌های به قطرهای خطهای سوائی مثلث می‌باشد.

در بیان قضیه (۴.۲، ۶) به این نکته اشاره شد که «سه دایره بديك دسته دایره‌ها متعلق نباشند». این موضوع ایجاب می‌کند که خطهای سوائی قطرهای سه دایره هر سه از يك رأس رسم نشده باشند. اما این موضوعی است که باید دنبال شود و قضیه آینده نیز به همین منظور است.

هر گاه قضیه (۴.۲، ۶) را در مورد سه خط سوائی AX ، BY و CZ بکار برده و عاملهای دیگری را دخالت دهیم، مسئله‌های جالبی را نتیجه خواهیم گرفت. هر چند که لازم نیست این سه خط سوائی متقارب باشند اما وقتی چنین باشد موضوع پیچیده تر خواهد بود. هر گاه دایره‌ها را به قطرهای میانه‌های مثلث، ارتفاعها یا نیمسازهای زاویه‌های آن در نظر بگیریم، در این حال مثلاً می‌توانیم ثابت کنیم که مرکز اصلی آنها مرکز ارتفاعی مثلث است.

حالت بسیار جالب وقتی است که سه خط سوائی AX ، BY و CZ متقارب نباشند اما سه نقطه X ، Y و Z بريك استقامت واقع باشند که در این صورت، مانند شکل (۴.۲، ت)، حداقل یکی از سه نقطه مزبور بر امتداد ضلع مثلث قرار خواهد داشت. می‌توان مثلث AYZ را در نظر گرفت که برای آن سه نقطه B و C و X بريك استقامتند، یا اینکه مثلث BZX را با سه نقطه A و C و Y ، یا اینکه مثلث CXY را با سه نقطه A و B و Z . به هر حال نتیجه می‌شود که دایره‌های به قطرهای AX ، BY و CZ چنانند که محورهای اصلی دو به دو از آنها بر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC



(شکل ۴.۲، ت)

همچنین بر مرکزهای ارتفاعی سه مثلث دیگر می‌گذرد. چون این چهار مرکز ارتفاعی متمایزند، پس محورهای اصلی دایره دوی دایره‌ها برهم منطبقند و بنا براین:

قضیه ۴.۲-۷. هرگاه چهار خط درشش نقطه A, B, C, X, Y, Z متقاطع باشند به گونه‌ای که مجموعه‌های نقطه‌های به صورت سه تاییهای YCA, XBC, XYZ, ZAB بزرگ استقامت باشند، دایره‌های به قطرهای AX, BY, CZ به یک دسته دایره‌ها تعلق دارند و چهار مرکز ارتفاعی مثلثهای ABC, CXY, BZX, AYZ بزرگ خط راست واقعند.

درشکل (۳.۱) پ) مشاهده می‌شود که H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است. همچنین مشاهده خواهد شد که A مرکز ارتفاعی مثلث HBC ، B مرکز ارتفاعی مثلث HCA و C مرکز ارتفاعی مثلث HAB است. شکل $ABCH$ چهارگوشه ارتفاعی نام دارد. در این شکل با در نظر گرفتن هر سه تایی از چهار نقطه مفروض، چهار مثلث وجود دارد که دایره‌های محیطی آنها شعاعهای برابر دارند. برای اثبات این حکم می‌توان رابطه (۳.۴.۲) را روی شکل (۴.۲) اعمال کرد و از برابری دو مثلث HBC و $D'BC$ نتیجه گرفت که دایره‌های محیطی دو مثلث ABC و HBC نسبت به BC قرینه‌اند و با هم برابرند. به همین ترتیب ثابت می‌شود که دایره‌های محیطی مثلثهای HAB و HCA نیز با دایره‌های محیطی مثلث ABC برابرند.

تمرینات

- ۱- ارتفاعهای مثلث را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی آن را قطع کنند. سه نقطه تلاقی مثلثی تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که این مثلث با مثلث ارتفاعی مثلث مفروض متشابه است.
- ۲- نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در L, M, N قطع کنند. اندازه‌های زاویه‌های مثلث LMN را بر حسب

۱- [یادداشت از ح. غیور: این قضیه در چهار ضلعی کامل به صورت زیر درمی‌آید:
در چهار ضلعی کامل، سه دایره متمایز که به قطر هر یک از سه قطر چهار ضلعی رسم شوند جزء دسته دایره‌ای هستند که محور آن از مرکزهای ارتفاعی چهار مثلث که با ضلعهای چهار ضلعی پدید می‌آیند می‌گذرد.

از این قضیه بلافاصله بدین قضیه مهم می‌رسیم که در چهار ضلعی کامل وسطهای سه قطر بزرگ استقامتند.

طریقه اثبات معروف و کلاسیک آن بطور مستقیم این است که سه ارتفاع یکی از چهار مثلث را رسم می‌کنیم و به موجب رابطه (۴.۴.۲) ثابت می‌کنیم که قوت مرکز ارتفاعی این مثلث نسبت به سه دایره یکسان است.]

اندازه‌های زاویه‌های مثلث ABC بدست آورید.

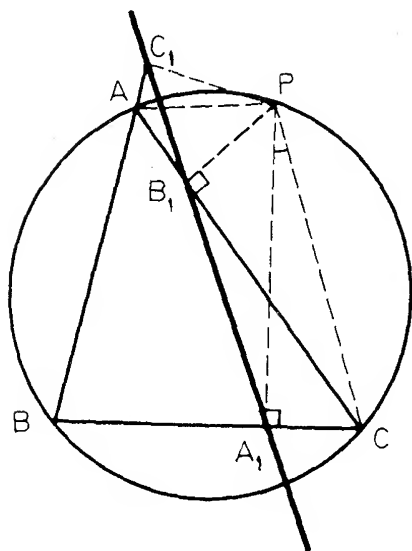
۵.۲- خط سه‌من (= سنسن)

اگر از نقطه دلخواه P واقع در صفحه مثلث ABC عمودهای PA ، PB و PC را به ترتیب بر ضلعهای BC ، CA و AB رسم کنیم. سه نقطه A_1 ، B_1 و C_1 معمولاً مثلثی تشکیل می‌دهند. درپیش در بند ۹.۱ گفتیم که این مثلث را مثلث عمودی نقطه P می‌نامیم و ویژگیهای آن را بررسی کردیم. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که P بر دایره محیطی مثلث واقع باشد.

برای پرهیز از درهمی شکل، P را بر کمان CA و نزدیکتر به A اختیار کرده‌ایم. در حالت‌های دیگر می‌توانیم با تبدیلی دوری نقطه‌های A ، B و C نتیجه یکسان بدست آوریم. با توجه به ویژگی چهار گوشه محاطی داریم:

$$\widehat{APC} = \pi - B = \widehat{C_1PA_1}$$

اگر از این دوزاویه متساوی زاویه APA_1 را کنسار بگذاریم نتیجه می‌شود که دو زاویه A_1PC و C_1PA با هم برابرند. اما در چهار گوشه محاطی A_1CPB_1 دو



(شکل ۱.۵.۲ الف)

زاویه A_1PC و A_1B_1C با هم برابرند. همچنین در چهار گوشه محاطی AB_1PC_1 دو زاویه C_1PA و C_1B_1A با هم برابرند. بنابراین دوزاویه AB_1C_1 و AB_1C با هم برابرند و در نتیجه سه نقطه C_1 ، B_1 و A_1 بر یک خط راست واقعند. در این حالت، مثلث عمودی نظیر نقطه P به صورت خط مستقیم درآمده است.

برعکس، اگر نقطه P چنان باشد که مثلث عمودی نظیر آن نسبت به مثلث ABC به وضع خط راست باشد. بدیهی است که P داخل یکی از زاویه‌های مثلث ABC و در آن سوی ضلع مقابل بدان زاویه قرار دارد. در این صورت با استدلال در جهت عکس استدلال بالا نتیجه خواهد شد که P بر دایره محیطی مثلث واقع است. بنابراین می‌توان گفت:

قضیه ۱۵۰۲- برای آنکه پاهای عمودهای وارد اذیک نقطه بر سه ضلع مثلث بر یک خط راست واقع باشند لازم و کافی است که آن نقطه بردایره محیطی مثلث قرار داشته باشد.

خطی که این سه پای عمود بر آن واقعند خط سمن نقطه مزبور نسبت به آن مثلث نام دارد. دابرت سمن^۱ (۱۷۶۸ - ۱۶۸۷) نه تنها در هندسه بلکه در حساب کارهای گوناگون انجام داده است. به عنوان نمونه، ثابت کرده است که اگر f_n جمله n ام دشته فیوناچی^۲ باشد:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots, f_n, \dots$$

خواهیم داشت:

$$f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$$

خط سمن از این جهت به او منسوب است که با ادراکات هندسی وی جورمی آید، اما جستجوی آن در آثار وی کاربریهوده ای است. در حقیقت کشف این خاصیت در ۱۷۹۷ توسط ویلیام والاس^۳ انجام گرفته است.

تمرینها

۱- اگر مثلثی در یک زاویه منفرجه باشد، آیا اثباتی که برای قضیه (۱۵۰۲) بکار رفت درباره آن نیز صادق است؟

۲- کدام نقطه از دایره محیطی مثلث انتخاب شود تا خط سمن نظیر آن بر CA واقع باشد؟

۳- آیا ممکن است که نقطه ای بر خط سمن نظیر خود واقع باشد؟ در این صورت این خط کدام است؟

۴- از نقطه A مماسهای AB و AC بردایره ای رسم شده است و از نقطه P واقع بردایره عمودهای PA_1 ، PB_1 و PC_1 بر خطهای BC ، CA و AB رسم شده است. ثابت کنید که:

$$\overline{PA_1}^2 = \overline{PB_1} \cdot \overline{PC_1}$$

۶۰۲- قضیه بطلمیوس^۴ و تعمیم آن

با استفاده از خواص خط سمن می توان قضیه ای بسیار مهم به شرح زیر نتیجه گرفت.

1- Robert Simson.

2- Fibonacci.

3- William Wallace.

4- Ptolémée

در این باره همان شکل (۵.۲، الف) را در نظر می گیریم. هر چند که مثلث عمودی $A_1B_1C_1$ نظیر نقطه P به وضع خاص به صورت خط راست در آمده است، اما باز هم قضیه (۱، ۹.۱) درباره اندازه های ضلعهای آن صادق است. بنابراین داریم:

$$B_1C_1 = \frac{a \cdot AP}{rR}, \quad A_1C_1 = \frac{b \cdot BP}{rR}, \quad A_1B_1 = \frac{c \cdot CP}{rR}$$

و چون $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$ می باشد. پس:

$$c \cdot CP + a \cdot AP = b \cdot BP$$

به عبارت دیگر:

$$AB \cdot CP + BC \cdot AP = AC \cdot BP$$

چهار ضلعی $ABCP$ محاطی است، بنابراین، قضیه زیر که به قضیه بطلمیوس معروف است، محقق می باشد:

قضیه ۱، ۶.۲- در هر چهار ضلعی محاطی، مجموع حاصل ضربهای ضلعهای (دو-بر-دو) برابر است با حاصل ضرب دو قطر.

عکس قضیه بطلمیوس در حالت کلی صادق است، اما باید در بیان آن به نکته دقیق زیر توجه داشت: هرگاه نقطه B_1 روی پاره خط A_1C_1 نباشد، برای هر وضع آن باید تساوی $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$ را با نامساوی $A_1B_1 + B_1C_1 > A_1C_1$ جانشین ساخت. در این صورت خواهیم داشت:

$$AB \cdot CP + BC \cdot AP > AC \cdot BP$$

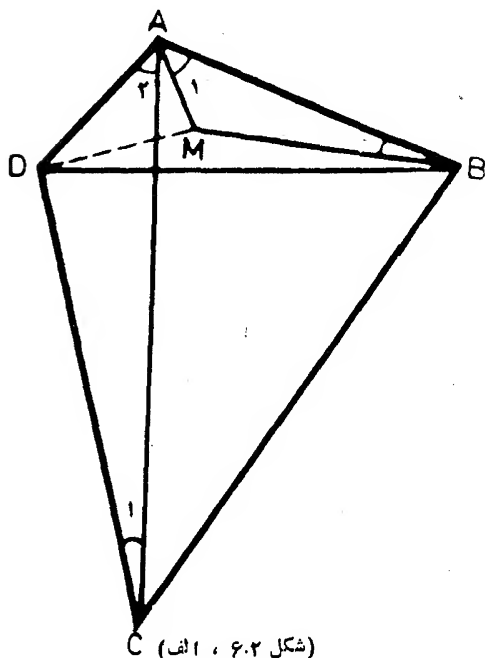
بنابراین:

قضیه ۲، ۶.۲- هرگاه P نقطه ای غیر واقع بر کمان CA از دایره محیطی مثلث ABC باشد داریم:

$$AB \cdot CP + BC \cdot AP > AC \cdot BP$$

[یادداشت از ح. غیور: گویا مؤلفان محترم که اثبات قضیه بطلمیوس را از خط سنسن و خاصیت مثلث عمودی نتیجه گرفته اند برای اثبات تعمیم قضیه و بویژه عکس آن بوده است. با برهان مقدماتی قضیه بطلمیوس (با استفاده از تشابه)، بلافاصله عکس و تعمیم آن نتیجه می شود:

در چهار ضلعی $ABCD$ چنانکه در شکل (۶.۲، الف) دیده می شود. زاویه A_1 برابر با زاویه A_2 و زاویه B_1 برابر با زاویه C_1 جدا شده است که از برخورد ضلعهای غیر مشترک این دو زاویه نقطه M بدست آمده است. از تشابه دو مثلث AMB و ADC نتیجه می شود:



شکل ۴.۲ ، الف ، ب

$$\frac{BM}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AD} \quad (۱)$$

$$AB \cdot DC = AC \cdot BM \quad (۲)$$

دو مثلث AMD و ABC در حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین آن دو ضلع متشابهند و خواهم داشت:

$$BC \cdot AD = AC \cdot MD \quad (۳)$$

از جمع دو طرف تساویهای (۲) و (۳) بدست می آید:

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = AC(MB + MD) \quad (۴)$$

اگر چهارضلعی محاطی باشد زاویه

ABD با زاویه C برابر بوده و M روی DB واقع می شود و رابطه (۴) چنین می شود:

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = AC \cdot BD \quad (۵)$$

اگر چهارضلعی محاطی نباشد $MB + MD > DB$ و از رابطه (۴) نتیجه می شود:

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD > AC \cdot BD \quad (۶)$$

از رابطه های (۵) و (۶) تعمیم قضیه بطلمیوس به شرح زیر بدست می آید:

در هر چهارضلعی، مجموع حاصل ضربهای دو ضلع روبرو بزرگتر یا برابر با حاصل ضرب دو قطر آن است:

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$$

عکس قضیه بطلمیوس - هرگاه در چهارضلعی ABCD رابطه (۵) برقرار باشد چهارضلعی محاطی است، زیرا اگر چهارضلعی محاطی نباشد رابطه (۶) برقرار خواهد بود که خلاف فرض است.

بعد از این روش مقدماتی، بهترین روش اثبات قضیه بطلمیوس و عکس و تعمیم آن با انعکاس انجام می گیرد.]

تمرینها

۱- مثلث متساوی الاضلاع ABC و نقطه P واقع در صفحه آن داده شده است،

بر حسب آنکه P بر کمان CA از دایره محیطی مثلث واقع باشد یا نباشد، ثابت کنید که داریم:

$$PC + PA = PB \quad \text{یا} \quad PC + PA > PB$$

۲- هرگاه P روی کمان CD از دایره محیطی مربع $ABCD$ واقع باشد. ثابت کنید که:

$$PA(PA + PC) = PB(PB + PD)$$

۳- متوازی الاضلاع $ABCD$ داده شده است. دایره‌ای بر A می‌گذرد و با ضلعهای AB و AD و قطر AC به ترتیب در P ، R و Q برخورد می‌کند. ثابت کنید که:

$$AP \cdot AB + AQ \cdot AD = AR \cdot AC$$

راهنمایی: قضیه بطلمیوس را در چهارضلعی $APQR$ بکار برده و از تشابه دو مثلث ABC و PQR استفاده کنید.

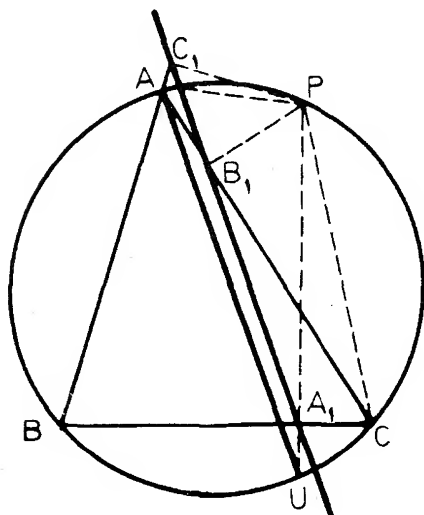
۷.۲- تنتمه در باره خط ممسن

خط ممسن خاصیت‌های جالب بسیار دارد که برخی از آنها شایسته بررسی است. مطابق با شکل (۷.۲، الف)، که همان شکل (۵.۲، الف) است که در آن عمود PA_1 را امتداد داده‌ایم تا با دایره محیطی مثلث در U برخورد کرده است و AU را رسم کرده‌ایم. در چهار ضلعیهای محاطی $PAUC$ و PB_1A_1C داریم:

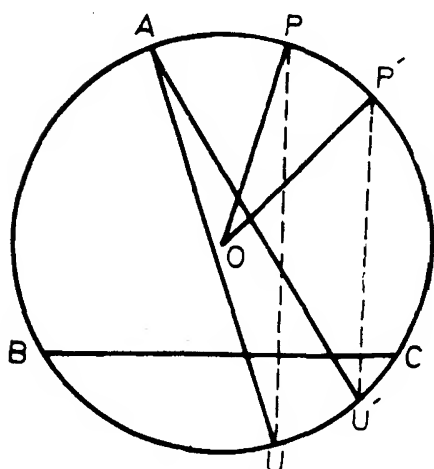
$$\begin{aligned} \widehat{PUA} &= \widehat{PCA} \\ &= \widehat{PCB_1} = \widehat{PA_1B_1} \end{aligned}$$

بنابراین خط AU با خط ممسن $A_1B_1C_1$ موازی است.

اکنون علاوه بر نقطه P ، نقطه دیگر P' از دایره محیطی مثلث ABC را در نظر



(شکل ۷.۲، الف)



(شکل ۷.۲، ب)

می گیریم و خطهای سمسن نظیر آنها را باهم مقایسه می کنیم. با توجه به اینکه خطهای سمسن نظیر نقطه های P و P' به ترتیب با خطهای AU و AU' موازیند. پس زاویه بین این خطهای سمسن با زاویه UAU' برابر است. اما کمان UU' با کمان PP' برابر است زیرا دو وتر PU و P'U' باهم موازیند، شکل (۷.۲، ب). بنابراین:

$$\widehat{UAU'} = \frac{1}{4} \widehat{UU'} = \frac{1}{4} \widehat{PP'} = \frac{1}{4} \widehat{POP'}$$

و هرگاه صفحه را جهت دار گرفته و اندازه جبری زاویه ها را بکار ببریم:

$$\widehat{UAU'} = \frac{1}{4} \widehat{UU'} = -\frac{1}{4} \widehat{PP'} = -\frac{1}{4} \widehat{POP'}$$

بنابراین قضیه زیر ثابت شده است:

قضیه ۷.۲-۱- نسبت به مثلث ABC خطهای سمسن نظیر دو نقطه P و P' زاویه ای می سازند که اندازه آن نصف اندازه کمان PP' است.

هرگاه P دایره محیطی مثلث را با سرعتی ثابت بپیماید، در این صورت خط AU حول نقطه A با سرعت زاویه ای ثابت می چرخد به قسمی که U دایره را در جهت عکس حرکت P می پیماید، و وقتی که P یک دور کامل محیط دایره را بپیماید خط AU در امتداد نخستین خود اما در جهت عکس قرار خواهد گرفت. در این ضمن خط سمسن نیز حول مرکزی متغیر دوران می کند و پوش آن منحنی متقارنی است که دلتوئید یا هیپوسیکلوئید اشتینر نام دارد. به سادگی و به گونه نقاشیهای متحرک که به فیلم تبدیل می شوند می توان این تغییر مکانها را دنبال کرد.

اکنون شکل (۷.۲، پ) را در نظر می گیریم که ترکیبی کامل شده از شکلهای (۴.۲، ت) و (۷.۲، الف) می باشد. در این شکل از P به H مرکز ارتفاعی مثلث وصل شده و PD' رسم شده است که با BC در Q برخورد کرده است. همچنین HQ رسم شده است که امتداد PU را در V قطع کرده است. خطهای PV و HD' بر

$$\widehat{D'HV} = \widehat{PVH}$$

$$= \widehat{D'PU} = \widehat{D'AU}$$

قضیه ۷۰۲-۲ خط سمن نظیر هر نقطه از دایره محیطی مثلث، منصف پاره خطی است که این نقطه را به مرکز ارتفاع مثلث وصل می کند.

آنچه گفته شد در حقیقت مقدمه‌ای است بر آنچه که دربارهٔ خط سمن می‌توان بیان کرد. برای خط سمن ویژگی‌های بسیار وجود دارد که به‌خاطر پرهیز از درازی مطلب، ناچاریم که خواننده را برای آگاهی بر آنها به سایر کتابها حواله دهیم.

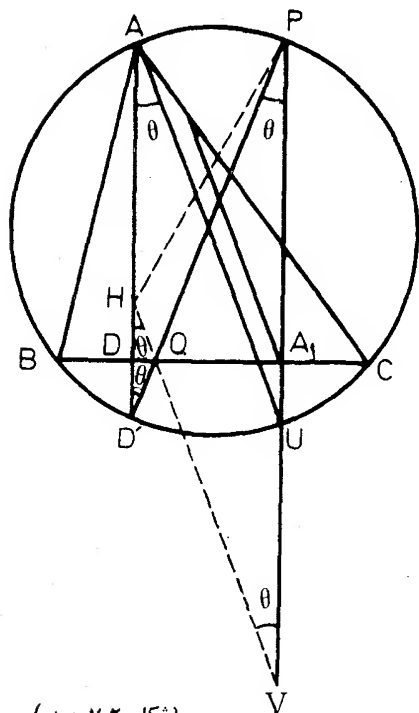
تقریباً

۱- روی دایره محیطی مثلث، دو نقطه واقع بر دوسریک قطر را در نظر می گیریم. ثابت کنید که خطهای سمسن نظیر این دو نقطه برهم عمودند و یکدیگر را روی دایره نقطه مثلث تلاقی می کنند.

۲- مثلث متساوی الاضلاع ABC در دایره به مرکز O محاط است و P نقطه‌ای از این دایره است. ثابت کنید که خط سمسین نظیر P از وسط شعاع OP می‌گذرد.

۸.۲- قضیہ یروانه

مداخلات می‌داند که قضیه پروانه، به عنوان قضیه یا مسئله، اینجا و آنجا مطرح

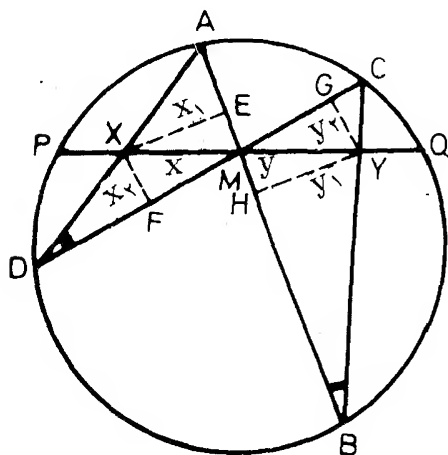


(شکل ۷.۲ ، پ)

شده است. این قضیه را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه ۱۸۰۲- در دایره مفروض، از نقطه M وسط وتر PQ دو وتر AB و CD را رسم می‌کنیم. وترهای AD و BC با وتر PQ به ترتیب در X و Y برخورد می‌کنند. ثابت کنید که M وسط XY است.

برای این قضیه برهانهای کما بیش طولانی و پیچیده ارائه شده است. یک برهان آن که در سال ۱۸۱۵ توسط هورنر بیان شده است به محاسبه مقادیر تقریبی ریشه‌های یک چند جمله‌ای مربوط می‌شود (به عقیده‌ای، یک چینی در این مورد مقدم بر هورنر بوده است). کوتاهترین برهان قضیه از راه هندسه تصویری انجام می‌گیرد.^۱ برهانی که در زیر آورده می‌شود هر چند کوتاه نیست اما از نظر بخاطر سپردن ساده و آسان است.



(شکل ۱۸۰۲)

مطابق با شکل (۱۸۰۲).

عمودهای $XH = y_1$ و $XE = x_1$ را بر AB و عمودهای $XF = x_2$ و $YG = y_2$ را بر CD رسم می‌کنیم. از تشابه مثلثهای MXE با MYH و MYH با MYG و MXE با DXF و CYG با AXE و به فرض $PM = MQ = a$ و $MY = y$ و $XM = x$ داریم:

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} \text{ و } \frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{y_2} &= \frac{AX}{CY} \text{ و } \frac{x_2}{y_1} = \frac{XD}{YB} \\ \frac{x^2}{y^2} &= \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_2}{y_1} \cdot \frac{x_1}{y_2} = \frac{AX \cdot XD}{CY \cdot YB} = \frac{PX \cdot XQ}{PY \cdot YQ} \\ &= \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \end{aligned}$$

بنابراین $x = y$ یعنی M وسط XY است.

۱- W.G.Horner

۲- یک برهان کاملاً ساده قضیه، یا مسئله، پروانه که با استفاده از مقاله اول هندسه انجام گرفته در «مجموعه علمی یکان» چاپ فروردین ۱۳۴۴ درج شده است. همچنین چند برهان دیگر آن در شماره‌های مختلف مجله ریاضی یکان چاپ شده است، مترجم.

تمرینها

- ۱- در شکل (۸.۲) خطهای AC و BD را رسم می کنیم تا امتداد PQ را در U و V قطع کنند. ثابت کنید که M وسط UV است.
- ۲- از نقطه P خارج دایره ای دو مماس PB و PT را بر آن دایره رسم می کنیم. قطر AB را از دایره و عمود TH را بر این قطر نیز رسم می کنیم. ثابت کنید که AP از وسط TH می گذرد.
- ۳- هرگاه I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC و X نقطه تماس BC با این دایره و A' وسط BC باشد، ثابت کنید که خط AI از وسط AX می گذرد.

۹.۲- قضیه مورلی

یکی از قضیه های کاملاً فوق العاده هندسه مقدماتی در حدود سال ۱۹۰۴ توسط فرانک هود^۱ ثابت شد. وی ابتدا این قضیه را برای دوستان انگلیسی خود در کالج شرح داد. ویست سال پس از آن، آن را در ژاپن منتشر ساخت. در این مدت این قضیه مجدداً کشف شده و در مجله تربیتی تایمز زیر عنوان مسئله درج شده بود که دو راه حل برای آن واصل گردیده بود. یکی از این دو راه حل از طرف م.ت. نارانینگار^۲ فرستاده شده بود که بیش از همه راه حل هایی که پس از آن و به تدریج برای مسئله ارائه شد زیبا می باشد. در زیر نخست خود قضیه و آنگاه راه حل مزبور بیان می شود.

قضیه ۹.۲-۱ هرگاه در داخل مثلث از هر رأس دو نیم خط رسم کنیم که زاویه آن رأس را به سه قسمت برابر تقسیم کند، نقطه هایی که از برخورد هر دو نیم خط مجاور به هریک پدید می آید مثلثی متساوی الاضلاع تشکیل می دهند (شکل ۹.۲، ب).

قبل از بیان برهان نارانینگار

لازم است که لم زیر ثابت شود:

لم - چهار نقطه Y, Z, Y', Z' که در شرطهای:

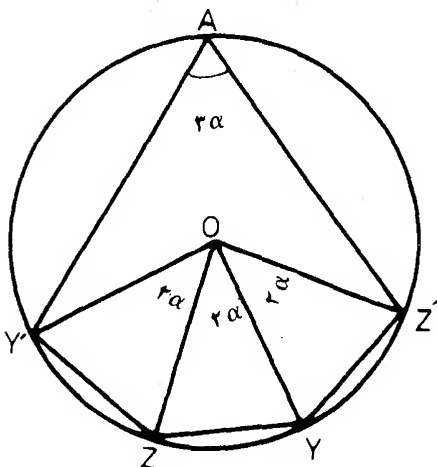
$$Y'Z = ZY = YZ'$$

$$\widehat{YZY'} = \widehat{Z'YZ}$$

$$= \pi - 2\alpha > \frac{\pi}{3}$$

صدق کنند بزرگ دایره واقعتند.

علاوه بر آن، نقطه A که با



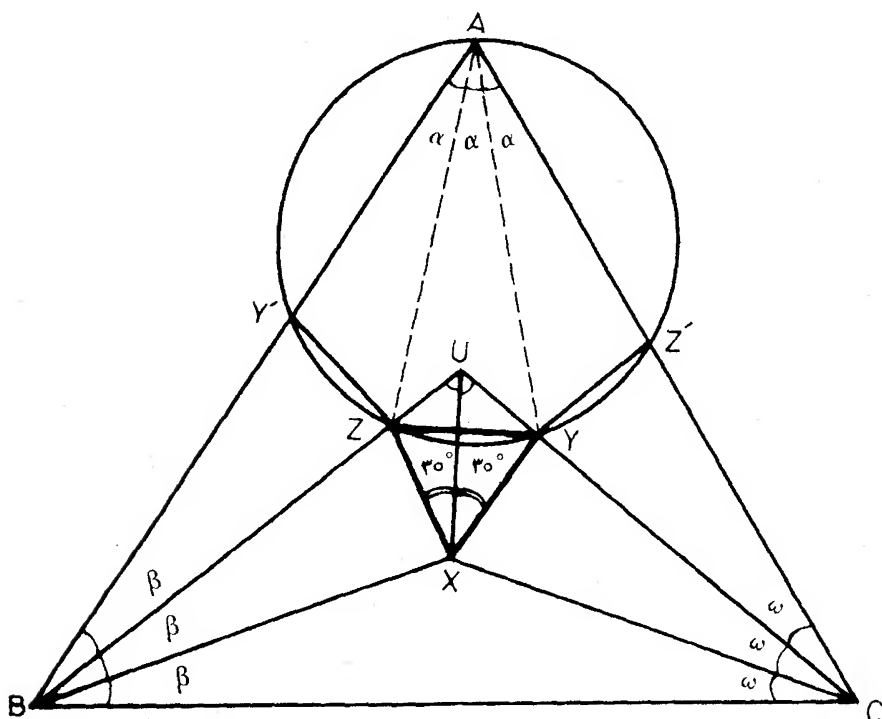
(شکل ۹.۲، الف)

Y در یک طرف خط $Y'Z'$ واقع نباشد و $\widehat{Y'AZ'} = 3\alpha$ باشد نیز بر همان دایره واقع است.

مطابق با شکل (۹.۲، الف)، نیمسازهای دو زاویه متساوی $Z'YZ$ و YZY' در O برخورد می کنند. مثلثهای OYZ' ، OZY ، $OY'Z$ باهم برابرند و متساوی الساقین می باشند و اندازه هر یک از زاویه های مجاور به قاعده آنها $\frac{\pi}{2} - \alpha$ است.

بنابراین چهار نقطه Y' ، Z ، Y ، Z' بر دایره به مرکز O واقعند. در این دایره هر یک از کمانهای YZ' و ZY ، $Y'Z$ ، YZ' و ZY به زاویه مرکزی 2α است، پس کمان $Y'Z'$ که شامل نقطه Y نیست کمان درخورد زاویه 3α است. بنابراین نقطه A با شرطهای گفته شده برای کمان قرار دارد.

اکنون با استفاده از این لم به اثبات قضیه می پردازیم: مطابق با شکل (۹.۲، ب)، نیم خطهایی که زاویه های B و C را به سه پاره برابر تقسیم کرده اند در X و U برخورد می کنند. در مثلث BCU نقطه X محل برخورد نیمسازهای دو زاویه داخلی است. پس



(شکل ۹.۲، ب)

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \implies \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\widehat{YZU} = \frac{\pi}{3} - \alpha, \quad \widehat{XZU} = \frac{2\pi}{3} - \alpha.$$

$$Y'Z = ZX = ZY = YX = YZ'$$

زاویه‌های BZY' و BZX باهم برابرند. پس مکملهای آنها نیز باهم برابرند و بنابراین:

$$\widehat{UZ\bar{Y}'} = \widehat{XZU} = \frac{2\pi}{3} - \alpha$$

$$\widehat{YZY'} = \widehat{YZU} + \widehat{UZY'} = \left(\frac{\pi}{r} - \alpha\right) + \left(\frac{r\pi}{r} - \alpha\right) = \pi - r\alpha$$

همچنین اندازه زاویه $Z'YZ$ برابر با $\pi - 2\alpha$ است و $\alpha = \frac{A}{3} < \frac{\pi}{3}$

بنابراین با توجه به آنکه قبلاً ثابت شد نتیجه می‌شود که پنج نقطه Z, Y, Z', Y' و A بر یک دایره واقعند. وترهای متساوی YZ' و $ZY, Y'Z$ و برپویه زاویه‌های به اندازه α و به رأس A می‌باشند و نیم خطهای AZ و AY زاویه A را به سه قسمت برابر با هم تقسیم کرده‌اند. به عبارت دیگر، سه نقطه X و Y و Z را که آنچنان تعیین کردیم که رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند در واقع نقطه‌های تلاقی نیم خطهای می‌باشند که هر یک از زاویه‌های مثلث را به سه قسمت برابر تقسیم کرده‌اند.

قمر وینہا

۱- در شکل (۹.۲، ب) خط‌های AZ و CX را امتداد می‌دهیم تا در V برخورد کنند. همچنین خط‌های BX و AY را امتداد می‌دهیم تا در W برخورد کنند.

ثابت کنید که سه خط UX و VY و WZ متقارزند (از نظر هندسه تصویری، مثلثهای UVW و XYZ همسانند. اما در حالت کلی، مثلث UVW متساوی الاضلاع نمی باشد).

۲- مثلث ABC چه نوع باشد تا اینکه پنج ضلعی $AY'ZY'Z'$ منتظم باشد؟

۳- هرگاه مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد ثابت کنید که نقطه های Y, Z, Y' و

Z' چهار رأس از یک چند ضلعی منتظم می باشند و نقطه A رأس دیگری از این چند ضلعی و روبرو به ضلع AY است.

۴- هرگاه α, β و γ اندازه های زاویه ها و R شعاع دایره محیطی یک مثلث باشد، ثابت کنید که طول ضلع مثلث مورلی نظیر آن برابر است با: $R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

۵- در مستطیل $BCZ'Y'$ ضلع $Z'Y'$ را به وسیله نقطه های Y و Z به سه پاره برابر تقسیم می کنیم به گونه ای که $Z'Y = YZ = ZY'$. هرگاه X مرکز مستطیل

با Y و Z مثلثی متساوی الاضلاع تشکیل دهد، ثابت کنید که خطهای BX و BZ زاویه B از مستطیل را به سه زاویه برابر با هم تقسیم می کنند.

نقطه‌های بريك استقامت خطهای متقارب

آنگاه پرگارهایی همگی بزرگ را بکشود، آنها را
بکار انداخت و آسه‌ها و پهلوها را بکشید، تا آنکه آنچه مربع و
مستطیل می‌نمود، همچون شکلی پیچیده درآمد.

داگن (از کتاب دوم اقلیدس) C.L.Dodgson

پس از بررسی ویژگیهای دیگری از مثلثها و چهار گوشه‌ها، دامنه هندسه تصویری را
در روبرو خواهیم داشت، حتی از آنهم کمی فراتر خواهیم رفت. هر چند بیان منظم این
موضوع خود کتابی جداگانه باید باشد؛ اما یادآوری چهار قضیه اساسی آن در اینجا به
مورد می‌باشد، زیرا می‌توان آنها را با روشهای اقلیدسی ثابت کرد. در حقیقت، سه عدد
از این قضیه‌ها آنقدر قدیمی هستند که در زمان کشف آنها روشی دیگر رانمی‌شناختند. در همه
این قضیه‌های مورد بحث، یا موضوع خطهای متقارب و یا موضوع نقطه‌های بريك استقامت به
میان می‌آید. ناگفته نباید گذاشت که فکر هندسه تصویری از آنجا ناشی شد که در بسیاری
از حالتها می‌توان خطهای متوازی را همچون خطهای متقارب در نظر گرفت.

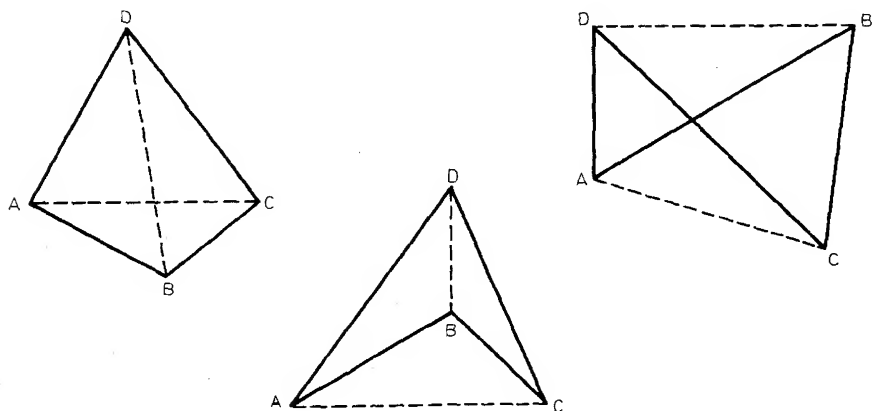
۱.۳- چهار گوشه‌ها؛ قضیه وارینیون

می‌توان گفت که چند ضلعی شکلی است شامل تعدادی نقطه موسوم به رأس و تعدادی
پاره خط موسوم به ضلع. نقطه‌ها به يك صفحه متعلقند و مجموعه مرتب متناوبی تشکیل
می‌دهند، و ضلعها رأسهای مجاور را به یکدیگر وصل می‌کنند؛ بالاخره هر سه رأس مجاور
نمی‌توانند بريك استقامت باشند. به عبارت دیگر، چند ضلعی خط شکسته بسته‌ای واقع در يك

صفحه است. برای مثال پنج ضلعی دارای پنج ضلع و پنج رأس است و شش ضلعی از هر کدام شش عدد دارد و غیره. اما این نامگذاری که از یونانیان است (و نام چند ضلعی تعداد ضلعها و رأسهایش را می‌نمایاند) برای سه ضلعی معمول نیست؛ چنانکه آن را مثلث می‌نامیم. در زبانهای انگلیسی و فرانسه برای مثلث اصطلاح (Triangle) بکار می‌رود که به معنی «سه زاویه‌ای = سه گوشه» می‌باشد. برای چهار ضلعی هم عنوان چهار گوشه (= چهار زاویه‌ای) بکار می‌رود. در این کتاب نیز اصطلاح چهار گوشه بکار خواهد رفت؛ در هندسه تصویری که ضلعها دیگر پاره خطهای ساده نیستند. بلکه خطهای نامعین می‌باشند، لازم است که دو اصطلاح چهار ضلعی و چهار گوشه با دو معنی متفاوت بکار رود.

در چهار گوشه، دو ضلع را مجاور یا مقابل می‌نامیم بر حسب آنکه در یک رأس مشترک باشند یا نباشند. همچنین دو رأس را مجاور یا مقابل می‌نامیم بر حسب آنکه روی یک ضلع واقع باشند یا نباشند. خطهایی که دو رأس مقابل را به هم وصل می‌کنند قطرهای چهار گوشه نام دارند؛ در چهار گوشه ABCD ضلعها عبارتند از: AB، BC، CD و DA که مثلاً AB با BC و همچنین با DA مجاور و با CD مقابل است. قطرهای این چهار گوشه AC و BD می‌باشند.

در شکل (۱۰۳، الف) سه گونه چهار گوشه با ظاهرهای کاملاً متفاوت مشاهده



(شکل ۱۰۳، الف)

۱- بنا به تعریفی که توسط R. Deltheil و D. Caire بیان شده است؛ چهار گوشه شکلی است که از چهار نقطه واقع در صفحه تشکیل می‌شود، در صورتی که از اصطلاح چهار ضلعی برمی‌آید که شکلی حاصل از چهار خط است. اما چهار خط واقع در صفحه شکل شامل شش رأس را بوجود می‌آورند که چهار ضلعی کامل نام دارد.

می‌شود: اولی، از چپ، کوژ (= محدب) است و دو قطر آن در درون پیرامون آن قرار دارند؛ دومی کاو (= مقعر) است یک قطرش در درون و قطر دیگرش در بیرون پیرامون آن واقع است، سومی پنجره‌ای است، هر دو قطرش در بیرون پیرامون آن واقعند.

چنانکه مشاهده می‌شود مساحت چهار گوشه کوژ برابر است با مجموع مساحت‌های دو مثلث که بوسیله قطر آن پدید می‌آید:

$$S(ABCD) = S(ABC) + S(CDA) = S(BCD) + S(DAB)$$

برای آنکه این دستور برای چهار گوشه کاو نیز صادق باشد، مساحت مثلث را طبق تعریف زیر عدد جبری، مثبت یا منفی، می‌گیریم: مساحت مثلث ABC را که به صورت $S(ABC)$ نوشته می‌شود مثبت می‌گیریم هرگاه جهت گذاردن حرف‌های A و B و C در جهت مستقیم، یعنی در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، باشد و آن را منفی می‌گیریم هرگاه جهت گذاردن حرف‌های مزبور در جهت معکوس باشد. بنا براین:

$$S(ABC) = S(BCA) = S(CAB) = -S(CBA) = -S(ACB) = -S(BAC)$$

با این تعریف برای چهار گوشه کاو واقع در وسط شکل (۱.۳، الف) داریم:

$$S(ABCD) = S(BCD) + S(DAB) = S(CDA) - S(CBA) = S(CDA) + S(ABC)$$

با بکار بردن دستور بالا نتیجه خواهد شد که مساحت چهار گوشه پنجره‌ای برابر است با تفاضل مساحت‌های دو مثلثی که از برخورد ضلع‌های آن پدید می‌آید.

هرگاه قرارداد مربوط به جهت دار بودن مساحت را توأم با قرارداد مربوط به خط و پاره خط‌های جهت دار در نظر بگیریم، می‌توانیم اثباتی را که قبلاً در (۱.۲.۱) و (۲.۲.۱) برای قضیه سوا و عکس آن بیان کردیم برای حالتی که نقطه‌های X و Y و Z در امتداد ضلعها واقع باشند نیز تعمیم دهیم.

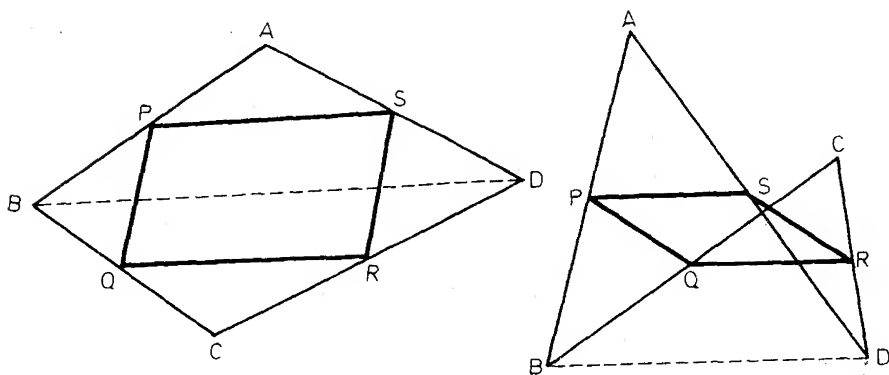
قضیه زیر که منسوب به پیروازینیون^۲ (۱۷۲۲-۱۶۵۴) است آنقدر ساده می‌باشد که تعجب آور است چرا انتشار آن تا ۱۷۳۱ به تأخیر افتاد.

قضیه ۱.۳- هرگاه وسط‌های ضلع‌های یک چهار گوشه را متوالیاً بهم وصل کنیم، یک متوازی الاضلاع پدید می‌آید که مساحت آن نصف مساحت چهار گوشه است.

۱- یادداشت از ح. غیور: مساحت هر چهار ضلعی (کوژ، کاو، پنجره‌ای) برابر است با تفاضل مساحت‌های دو مثلثی که از تقاطع دو ضلع رو برو پدید می‌آید: اگر E نقطه برخورد AB و CD باشد.

$$S(ABCD) = S(EDA) - S(ECB)$$

برای اثبات این قضیه قبلا باید بدانیم که پاره خطی که وسطهای دضلع مثلث را بهم وصل می کند با ضلع سوم موازی است و طولش نصف طول آن ضلع است.



(شکل ۱.۳، ب)

مطابق ببا شکل (۱.۳، ب) هرگاه P, Q, R, S به ترتیب وسطهای ضلعهای AB, BC, CD, DA از چهار گوشه $ABCD$ باشد. در مثلثهای ABD و CBD پاره خطهای PS و QR که وسطهای دضلع را بهم وصل کرده اند با ضلع سوم یعنی با قطر BD از چهار گوشه موازیند و با نصف آن برابرند. بنابراین دو پاره خط PS و QR باهم برابر و باهم موازیند. پس $PQRS$ متوازی الاضلاع است که به متوازی الاضلاع وارینیون نظیر چهار گوشه $ABCD$ موسوم است^۱.

در باره مساحت این متوازی الاضلاع، قبلاً یادآوری می شود که هرگاه P وسط AB و Q وسط BC از مثلث ABC باشد چون PQ نصف AC و ارتفاع مثلث CAB نصف ارتفاع مثلث ABC است پس مساحت مثلث BPQ یک چهارم مساحت مثلث BPQ است.
بنابراین:

$$\begin{aligned} S(PQRS) &= S(ABCD) - S(PBQ) - S(RDS) - S(QCR) - S(SAP) \\ &= S(ABCD) - \frac{1}{4}S(ABC) - \frac{1}{4}S(CDA) - \frac{1}{4}S(BCD) \\ &\quad - \frac{1}{4}S(DAB) \end{aligned}$$

۱- هرگاه $ABCD$ یک چهار گوشه چپ باشد، یعنی چهار رأسش در یک صفحه نباشد، باز هم $PQRS$ یک متوازی الاضلاع است.

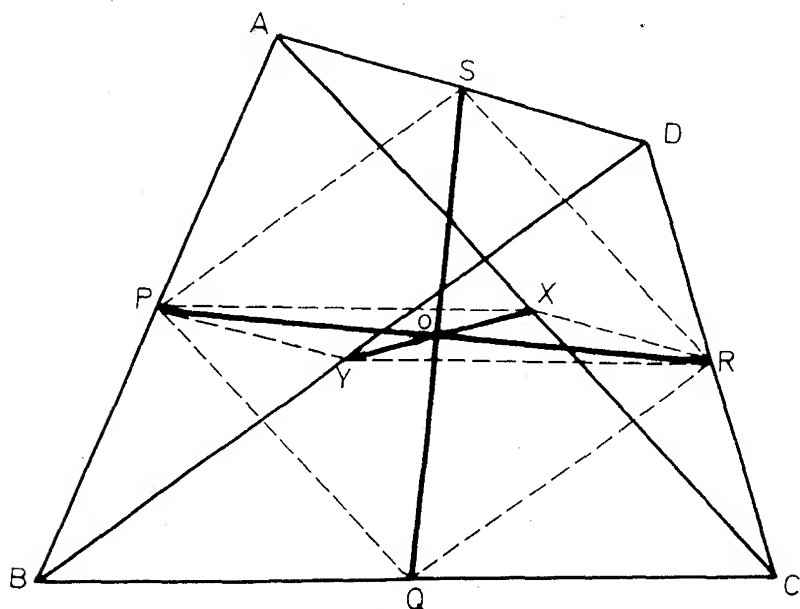
$$= S(ABCD) - \frac{1}{4} [S(ABCD) + S(ABCD)]$$

$$= \frac{1}{4} S(ABCD)$$

عملیات بالا برای چهار گوشهٔ کاو (ساده یا پنجره‌ای) نیز صادق است.

در هر متوازی‌الاضلاع دو قطر منصف یکدیگرند که نقطهٔ برخورد آنها مرکز متوازی‌الاضلاع است. در چهار گوشهٔ ABCD هرگاه X وسط قطر AC و Y وسط قطر BD باشد، مطابق باشکلی (۱۰۳، پ) که کامل‌شدهٔ شکل (۱۰۳، ب) است، چهار گوشهٔ PYRX نیز متوازی‌الاضلاع است و O وسط PR، یعنی مرکز متوازی‌الاضلاع PQRS، وسط XY نیز می‌باشد.

بنابراین:



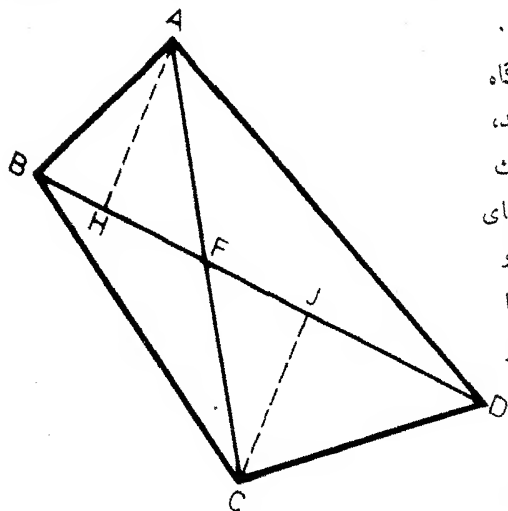
(شکل ۱.۳، پ)

قضیه ۲۰۱۳- در هر چهارگوشه، خطهایی که وسطهای ضلعهای دوبرو و وسطهای دو قطر را بهم وصل می کنند در يك نقطه متقاطعه و وسط هر کدام از آنها است.

این قضیه نخستین قضیه ای است که در این بخش درباره خطهای متقارب بیان شد. پیش از بیان قضیه های دیگری در این باره، قضیه زیر که در حد خود مفید است بیان می شود:

قضیه ۳۰۱۳- اگر یکی از قطرهای چهارگوشه ای آن را به دو مثلث معادل (= با

مساحت‌های برابر) تقسیم‌کند، این قطر منصف قطر دیگر است.
برعکس؛ هرگاه قطری از یک چهارگوشه منصف قطر دیگر باشد، آن قطر چهارگوشه
۱) به دو مثلث معادل تقسیم می‌کند.



(شکل ۱.۳، ت)

در چهارگوشه $ABCD$ هرگاه
دو مثلث ABD و CBD معادل باشند،
شکل (۱.۳، ت)، چون این دو مثلث
در قاعده BD مشترکند پس ارتفاع‌های
 AH و CJ از آنها با هم برابرند و
در نتیجه دو مثلث AHF و CJF با
هم برابرند و نتیجه می‌شود $AF = FC$
یعنی F وسط قطر AC است.
برعکس، از تساوی $AF = FC$
تساوی دو مثلث AHF و CJF و
از آنجا تساوی $AH = CJ$ نتیجه

می‌شود که معلوم می‌دارد دو مثلث ABD و CBD با هم معادلند.

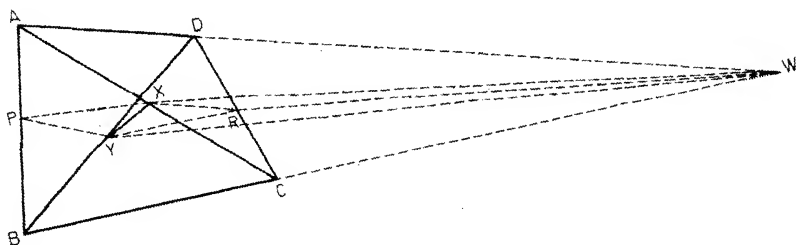
اکنون قضیه دوم مربوط به عنوان این بخش را بیان می‌کنیم:

قضیه ۱.۳-۴- هرگاه AD و BC دو ضلع دوبرو از چهارگوشه $ABCD$ در W

برخورد کنند و X و Y به ترتیب وسط‌های قطرهای AC و BD باشند، مساحت مثلث
 WXY یک چهارم مساحت چهارگوشه $ABCD$ است.

P وسط AB و R وسط CD را در نظر می‌گیریم و خط‌های PX و PY و

RX و RY و RW را رسم می‌کنیم. در مثلث BCD خط RY موازی با BC



(شکل ۱.۳، ت)

است و از وسط DW قطر دیگر چهار گوشه DYWR می‌گذرد. بنابراین بنا بر عکس قضیه (۳، ۱.۳) داریم:

$$S(RYW) = S(YRD) = \frac{1}{4}S(BCD)$$

همچنین خواهیم داشت:

$$S(RWX) = \frac{1}{4}S(CDA)$$

همچنین با توجه به قضیه وارینیون برای چهار گوشه ABCD خواهیم داشت:

$$S(RXY) = \frac{1}{4}S(PYRX) = \frac{1}{4}S(ABDC) = \frac{1}{4}S(CAB) + \frac{1}{4}S(BDC)$$

$$= \frac{1}{4}S(ABC) - \frac{1}{4}S(BCD)$$

از جمع نظیر به نظیر دو طرف سه رابطه بالا بدست می‌آید:

$$S(WXY) = S(RXY) + S(RYW) + S(RWX)$$

$$= \frac{1}{4}S(ABC) - \frac{1}{4}S(BCD) + \frac{1}{4}S(BCD) + \frac{1}{4}S(CDA)$$

$$= \frac{1}{4}S(ABC) + \frac{1}{4}S(CDA)$$

$$= \frac{1}{4}S(ABCD)$$

[یادداشت از ح. غیور: از این قضیه، قضیه زیر که از خواص مهم چهار ضلعی کامل

است بلافاصله نتیجه می‌شود که نمی‌توان از آن صرف نظر کرد:

در چهار ضلعی کامل، وسطهای سه قطر بر یک خط راست واقعند.

زیرا در چهار ضلعی کامل ABCDEF اگر P، Q، R به ترتیب وسطهای

AC، BD و EF باشند، بنا به قضیه (۴، ۱.۳) دو مثلث FPQ و EPQ معادلند و چون

در قاعده PQ مشترکند راستای PQ قطر EF را نصف می‌کند.]

تمرینها

۱- ثابت کنید که محیط متوازی الاضلاع وارینیون هر چهار گوشه برابر است با

مجموع طولهای دو قطر آن چهار گوشه.

۲- ثابت کنید که در هر چهار گوشه، مجموع مجذورهای ضلعها برابر است با

مجموع مجذورهای قطر ها به اضافه چهار برابر مجذور طول پاره خط واصل بین وسطهای دو قطر.

۳- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، مجموع مجذورهای ضلعها برابر است با مجموع مجذورهای دو قطر.

۴- هرگاه a طول ساق و b و c طولهای دو قاعده و d طول قطر يك دوزنقه متساوی الساقین باشد، ثابت کنید که :

$$d^2 = a^2 + bc$$

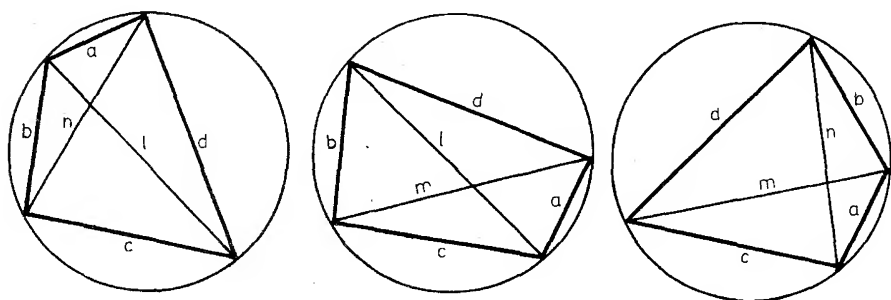
۲.۳- چهار گوشه های محاطی ؛ دستور برایهماگویی

مجموعه ای از پاره خطهایی به تعداد E را در نظر می گیریم که دو به دو در V نقطه واقع در يك صفحه به یکدیگر وصل شده اند. این پاره خطها را می توانیم میله هایی صلب تصور کنیم که دو به دو به یکدیگر مفصل شده اند و می توانند در این مفصلها حرکت کنند اما همیشه در يك صفحه واقعند. هرگاه $E = V = 3$ باشد، شکل حاصل که مثلث است ثابت باقی می ماند. اما در مورد چهار گوشه که $E = V = 4$ است يك درجه آزادی وجود دارد؛ هر زاویه آن می تواند بزرگ یا کوچک شود. برای حالت های دیگر نیز امکان تغییرات وجود دارد. چنین دستگاهی از میله های دو به دو مفصل شده را «صلب» می نامیم هرگاه اندازه های جزءهای آن ثابت باقی بمانند، مانند حالت $E = V = 3$ مثلث؛ و آن را «شبه صلب» می نامیم هرگاه یکی از میله های آن را حذف کنیم صلیت آن از بین برود. سرهودس لامب^۱ به روشی ساده ثابت کرده است که شرط لازم، اما نه کافی، برای شبه صلب بودن يك دستگاه میله های دو به دو به هم مفصل شده آن است که:

$$E = 2V - 3$$

برای مثال اگر $E = 5$ و $V = 4$ باشد يك چهار گوشه داریم که علاوه بر طولهای ضلعها طول يك قطر آن نیز مشخص است؛ این چهار گوشه شکل ثابت دارد. به عبارت دیگر صلب است. اما اگر مثلاً قطر آن را کنار بگذاریم، یعنی طول قطر آن غیر مشخص باشد؛ در این صورت چهار گوشه يك درجه آزادی دارد، یعنی صلیت آن از بین رفته است. با چهار پاره خط به طولهای a, b, c و d به شرط آنکه طول هر کدام از مجموع طولهای سه پاره خط دیگر کوچکتر باشد می توان چهار گوشه های کوژ متعدد ساخت. با توجه به يك درجه آزادی این چهار گوشه ها، می توان با تغییر شکل آن، مجموع دوزاویه مقابل از آن را کم یا زیاد کرد تا اینکه این مجموع برابر 180° درجه شود :

در این حالت چهار رأس بریک دایره واقعند و چهار گوشه را محاطی می‌نامیم. اندازه‌های قطرهای این چهار گوشه محاطی را l و n می‌گیریم. مثلث bcl از این چهار گوشه (شکل ۲.۳، الف - چپ) را ثابت نگاه می‌داریم و مثلث ald را از آن جدا کرده برمی‌گردانیم و مجدداً چنان قرار می‌دهیم که باز هم با مثلث bcl در ضلع l مشترک باشد. در این صورت چهار گوشه محاطی $bcad$ را خواهیم داشت (شکل ۲.۳، الف - وسط) که طول یک قطر آن همان l و طول قطر دیگرش m می‌باشد. در این شکل باز مثلث bmd را برداشته برمی‌گردانیم و چنان قرار می‌دهیم که با مثلث amc باز هم در ضلع m مشترک باشد، در این صورت چهار گوشه محاطی $cabd$ را داریم که m و n قطرهای آن می‌باشند (شکل ۲.۳، الف - راست).



(شکل ۲.۳، الف)

در چهار گوشه‌های محاطی بالا بنا به قضیه بطلمیوس داریم:

$$ln = ac + bd \quad \text{و} \quad ml = ab + cd \quad \text{و} \quad nm = bc + ad$$

چهار گوشه‌های بالا کوژند و در هر کدام از آنها می‌توان مساحت چهار گوشه را برابر با مجموع مساحت‌های دو مثلث دانست که با تبدیلات به شرح بالا مساحت‌های این دو مثلث مقدار ثابت باقی مانده است، پس سه چهار گوشه بالا مساحت‌های برابر دارند. از اینرو می‌توانیم قضیه زیر را بیان کنیم:

قضیه ۲.۳-۱- با چهار پاره خط که هر کدام از مجموع سه‌تای دیگر کوچکتر باشد می‌توان سه نوع چهار گوشه محاطی ساخت و این چهار گوشه‌ها مساحت‌های برابر دارند. **فروع -** مساحت چهار گوشه محاطی تابعی متقارن از اندازه‌های ضلع‌های آن است.

[یادداشت از ح. غیور: بیان و اثبات این قضیه به نحو دیگر:

از دستور مساحت و شعاع دایره محیطی چهار ضلعی محاطی بر حسب ضلع‌های آن

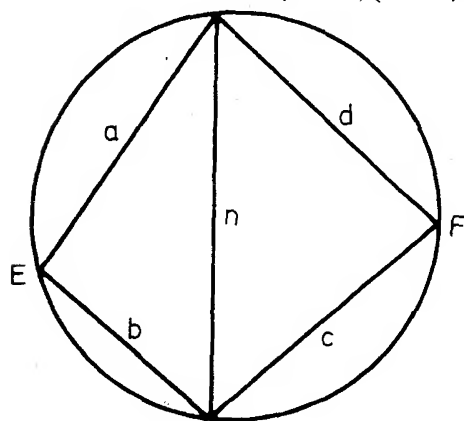
$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$R = \frac{V(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}{4S}$$

نتیجه می‌شود که: با چهارپاره خط که هر کدام از مجموع سه پاره خط دیگر کوچکتر است، می‌توان سه عدد چهار ضلعی محاطی ساخت که مساحت‌های آنها با هم و شعاع‌های دایره‌های محیطی آنها با هم برابر باشند.]

دستور دقیق مساحت چهار گوشه محاطی بر حسب اندازه‌های ضلع‌های آن، نخستین بار توسط ریاضیدان هندی براهما گوپتا که در قرن هفتم میلادی می‌زیسته به شرح زیر بدست آمده است:

قضیه ۲.۲.۳- هرگاه a و b و c و d اندازه‌های ضلع‌های یک چهار گوشه محاطی و s نصف محیط آن باشد، K مساحت آن از دستور زیر بدست می‌آید:

$$K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$


(شکل ۲.۳، ب)

یک روش ساده اثبات این دستور استفاده از مثلثات است. هرگاه E رأس مشترک ضلع‌های a و b و F رأس مشترک ضلع‌های c و d و n طول قطری باشد که دو رأس دیگر را به هم وصل می‌کند (شکل ۲.۳، ب)، از $E+F=\pi$ برمی‌آید که:

$$\sin E = \sin F \quad \text{و} \quad \cos E = -\cos F$$

اما داریم:

$$n^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos E$$

$$n^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos F$$

پس خواهیم داشت:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos E = c^2 + d^2 + 2cd \cos E$$

$$2(ab+cd) \cos E = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \quad (1-2.2.3)$$

از طرف دیگر برای مساحت چهار گوشه داریم:

$$K = \frac{1}{2} ab \sin E + \frac{1}{2} cd \sin F = \frac{1}{2} (ab+cd) \sin E$$

$$2(ab+cd) \sin E = 4K \quad (2-2.2.3)$$

دو طرف هر یک از تساویهای (۱-۲.۲.۳) و (۲-۲.۲.۳) را به توان دو رسانده و بعد

نظير به نظير با هم جمع می‌کنيم ، بدست می‌آيد:

$$\begin{aligned} 4(ab+cd)^2 &= (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 + 16K^2 \\ 16K^2 &= (2ab+2cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 \\ 16K^2 &= (2ab+2cb+a^2+b^2-c^2-d^2) \\ &\quad \times (2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2) \\ &= [(a+b)^2 - (c-d)^2][(c+d)^2 - (a-b)^2] \\ &= (a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b) \\ &\quad \times (c+d-a+b) \end{aligned}$$

با توجه به اينکه $2s = a+b+c+d$ خواهیم داشت:

$$16K^2 = (2s-2d)(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)$$

$$K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

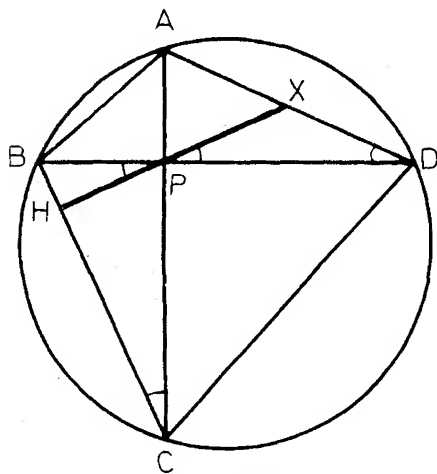
هرگاه در اين دستور $d=0$ اختيار شود ، دستور هرون مربوط به مساحت مثلث بدست می‌آيد:

$$[S(ABC)]^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

هرچند که اين دستور به هرون اسکندانی (سال ۶۰۰ ميلادی) منسوب است اما به گمان وان ددویردن متعلق به ارشميدس (قرن سوم پيش از ميلاد) می‌باشد.

کشف ديگری از براهما گوپتا مربوط به نوع خاصی از چهار گوشه محاطی است ، به شرح زیر:

قضيه ۳.۲۰۳- هرگاه دو قطر يك چهار گوشه محاطی برهم عمود باشند ، هر خط که از نقطه برخورد دو قطر بريك ضلع چهار گوشه عمود شود از وسط ضلع مقابل به اين ضلع می‌گذرد.



(شکل ۳.۳ ، ب)

مطابق با شکل (۳.۳ ، ب) ، چهار گوشه ABCD محاطی است و دو قطر AC و BD از آن در P برهم عمودند . خط PH بر BC عمود است و AD را در X تلاقی کرده است.

برای اثبات آنکه X وسط AD است ، ملاحظه می‌کنیم که زاویه‌های XPD و BPH با هم و زاویه‌های XDP و ACB با هم

برابرند. بنابراین دو زاویه XDP و XPD باهم برابرند و در نتیجه $XP=XD$.
همچنین ثابت می شود که $XP=XA$ بنابراین: $XA=XD$.

تمرینها

۱- چهار گوشه ای که اندازه های ضلعهایش a, b, c, d است در یک دایره محاط است و بر دایره دیگر محیط می باشد. ثابت کنید که K مساحت این چهار گوشه از دستور زیر بدست می آید:

$$K^2 = abcd$$

۲- مساحت هر یک از مثلثهای با ضلعهای به اندازه های زیر را بدست آورید:

$$(3, 14, 15) \text{ و } (13, 14, 15)$$

۳- اندازه شعاع دایره محاطی مثلث را بر حسب a, b, c اندازه های ضلعها، و s نصف مجموع این اندازه ها بدست آورید.

۴- در یک مثلث r, r_a, r_b, r_c شعاعهای دایره های محاطی داخلی و خارجی، شعاع دایره محیطی، s نصف محیط، I_a, I_b, I_c مرکزهای دایره های محاطی خارجی می باشد. ثابت کنید که:

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R \quad \text{و} \quad S(I_a I_b I_c) = 2sR$$

۵- با توجه به نامگذاریهای (۲.۳، الف) ثابت کنید که K مساحت چهار گوشه مزبور برابر است با:

$$K = \frac{lmn}{4R}$$

۶- تمرین ۵ را در حالت $d=0$ تعبیر کنید.

۷- چهار گوشه با ضلعهای به اندازه های a, b, c, d در دایره به شعاع R محاط است. ثابت کنید که K مساحت آن از دستور زیر بدست می آید:

$$K^2 = \frac{(bc+ad)(ca+bd)(ab+cd)}{16R^2}$$

۸- ضلعهای روبرو از یک چهار گوشه محاطی در V و W برخورد می کنند. ثابت کنید که نیمسازهای دوزاویه V و W برهم عمودند.

۱- یادداشت از ح. غیور: از قضیه (۲.۳، ۳) قضیه زیر به سادگی بدست می آید:
در چهار گوشه محاط در دایره به مرکز O که قطرهای آن در P برهم عمودند، وسطهای ضلعها و تصویرهای قائم P روی ضلعها هشت نقطه واقع بر محیط یک دایره اند که مرکز آن وسط OP است.

۹- از نقطه P واقع در صفحه مستطیل $ABCD$ به رأسهای آن وصل می‌کنیم. ثابت کنید که:

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PD}^2 = 0.$$

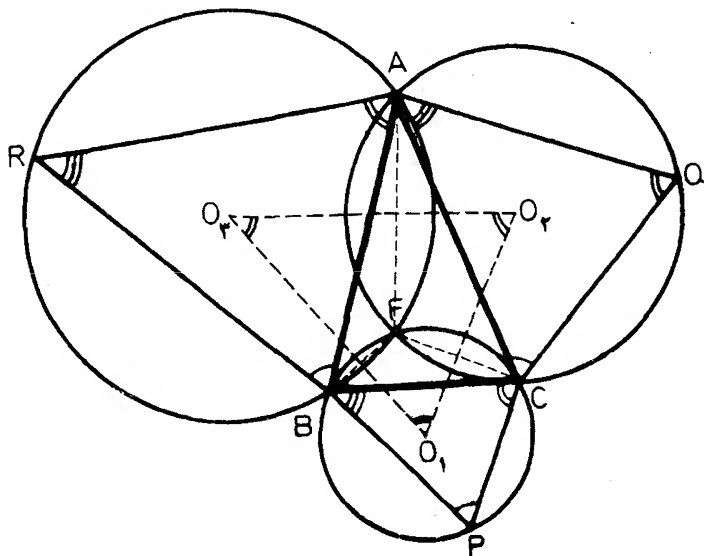
۱۰- ثابت کنید که حاصل ضرب فاصله‌های هر نقطه واقع بر دایره محیطی یک چهار گوشه محاطی از دو ضلع روبروی آن برابر است با حاصل ضرب فاصله‌های آن نقطه از دو ضلع دیگر و برابر است با حاصل ضرب فاصله‌های آن از دو قطر.

۳.۳- مثلثهای ناپلئون

در اینجا به بررسی چند شکل می‌پردازیم که از روی مثلثها و چهار گوشه‌ها بدست می‌آیند. شگفت‌آور است که به قضیه‌های ساده‌ای از قبیل قضیه زیر چندان توجهی نشده است.

قضیه ۳.۳-۱- هرگاه روی هر يك از ضلعهای مثلث و در بیرون آن سه مثلث چنان رسم کنیم که مجموع زوایه‌های رأسهای آن‌ها که غیرمجاور مثلث مفروض است برابر با 180° باشد، دایره‌های محیطی این مثلثها ديك نقطه مشترکند.

این قضیه که در باره خطهای متقارب است، اثباتی بسیار ساده دارد. بنا به شکل (۳.۳-الف)، روی ضلعهای مثلث ABC و در بیرون آن، مثلثهای CBP ، ACQ و BAR را چنان رسم کرده‌ایم که مجموع سه زاویه P ، Q و R برابر با 180° است. دایره‌های محیطی دو مثلث CBP و ACQ که در C مشترکند در نقطه دیگر F نیز مشترکند. از F به سه نقطه A ، B و C وصل می‌کنیم. هر يك از چهار گوشه‌های $FBPC$



(شکل ۳.۳، الف)

و FCQA محاطی است و با توجه به اینکه در هر چهار گوشه محاطی زاویه‌های روبرو مکملند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}\widehat{AFB} &= 360^\circ - (\widehat{BFC} + \widehat{CFA}) \\ &= 360^\circ - [(\widehat{180^\circ - \hat{P}}) + (\widehat{180^\circ - \hat{Q}})] \\ &= \hat{P} + \hat{Q} = 180^\circ - \hat{R}\end{aligned}$$

بنابراین چهار گوشه ARBF محاطی است و دایره محیطی مثلث ABR از F می‌گذرد.

دو حالت خاص این قضیه، به شرح زیر، جالب توجه است:

قضیه ۳.۳.۲- هرگاه رأسهای A، B و C از مثلث ABC به ترتیب دوی ضلعهای QR، RP و PQ از مثلث PQR واقع باشند، دایره‌های محیطی مثلثهای CBP، ACQ و BAR در یک نقطه مشترکند.

قضیه ۳.۳.۳- هرگاه دوی ضلعهای مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متشابه PCQ و CQA و BAR را بسازیم (که در تشابه آنها زاویه‌های نظیر به‌ترتیبی است که در نامگذاری مثلثها بکار رفته است و ملاحظه می‌شود که زاویه‌های P، Q و R متناظر نیستند)، دایره‌های محیطی سه مثلث مزبور در یک نقطه مشترکند.

قضیه (۲.۳.۳) در ۱۸۳۸ توسط میکل^۱ ثابت شده و از طرف فورد^۲ به قضیه محدود موسوم شده است. هرگاه به جای A، B، C، P، Q، R به ترتیب A_۱، B_۱، C_۱، A، B، C را بکار ببریم تا همان شکل (۹.۱، الف) را داشته باشیم، می‌توانیم این قضیه را بدشرح مبسوط زیر ثابت کنیم: هرگاه A_۱، B_۱، C_۱ سه نقطه دلخواه باشند که به ترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC واقع باشند، دایره‌های محیطی مثلثهای A_۱BC_۱، AB_۱C_۱ و A_۱B_۱C_۱ در یک نقطه P مشترکند. در حالت خاص که AP، BP و CP قطرهای این دایره‌ها باشند A_۱B_۱C_۱ مثلث عمودی نظیر نقطه P نسبت به مثلث ABC می‌باشد. اگر مثلث ABC و نقطه P ثابت باشد و خطهای PA_۱، PB_۱ و PC_۱ را با هم حول محور P و به زاویه دلخواه دوران دهیم، واضح است که دایره‌های محیطی مثلثهای A_۱B_۱C_۱، AB_۱C_۱ و A_۱B_۱C_۱ همواره از P می‌گذرند.

لازم نیست که سه نقطه A_۱، B_۱، C_۱ حتماً مثلث تشکیل دهند؛ ممکن است که این سه نقطه بر یک خط راست واقع باشند، مانند شکل (۵.۲، الف). در این حالت سه نقطه

A_1 ، B و C بر خطیهای AB_1 ، C_1A ، B_1C_1 واقعند و بنا به همان قضیه دایره‌های محیطی مثلثیهای ABC ، $A_1B_1C_1$ ، A_1BC_1 در يك نقطه مشترکند و چون تنها نقطه‌های مشترك دودایره آخری A_1 و P است، پس قضیه زیر ثابت شده است:

قضیه ۴،۳،۳- هرگاه چهار خط دوه‌دو دوشش نقطه A ، B ، C ، A_1 ، B_1 ، C_1 متقاطع باشند به گونه‌ای که A_1BC ، AB_1C ، ABC_1 ، $A_1B_1C_1$ نقطه‌های بريك استقامت را مشخص کنند، دایره‌های محیطی چهار مثلث A_1BC_1 ، A_1BC ، A_1B_1C و ABC در يك نقطه مشترکند.

در حالت خاص که AP ، BP و CP قطرهای سه دایره نخست باشند، A_1B_1 خط سمسن نقطه P نسبت به مثلث ABC می‌باشد. هرگاه مثلث ABC و نقطه P ثابت بماند و خطیهای PA_1 ، PB_1 و PC_1 باهم حول نقطه P به زاویه دلخواه به گونه‌ای دوران کنند که «خط سمسن مایل» بدست آید، در این صورت A_1 ، B_1 ، C_1 چنانند که خطیهای PA_1 ، PB_1 و PC_1 با خطیهای BC ، CA و AB زاویه‌های متساوی (در يك جهت) می‌سازند.

از قضیه (۳،۳،۳) نتیجه مهمی بدست می‌آید که به مثلث حاصل از O_1 ، O_2 ، O_3 مرکزهای دایره‌های محیطی سه مثلث BCP ، CAQ ، ABR مربوط می‌باشد (شکل ۳،۳، الف). ضلعیهای O_1O_2 ، O_2O_3 ، O_3O_1 از این مثلث به ترتیب پروترهای مشترك (محورهای اصلی) دوه‌دو دایره‌ها عمودند و زاویه‌های O_1 ، O_2 ، O_3 از این مثلث به ترتیب با زاویه‌های P ، Q و R برابرند. با توجه به اینکه این زاویه‌ها، زاویه‌های غیرمتناظر از سه مثلث متشابهند، پس:

قضیه ۵،۳،۳- هرگاه دوی ضلعیهای مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متشابه BAR ، CQA ، PCB را بسازیم (زاویه‌های متناظر به ترتیب نامگذاری مثلثها است)، مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلثها، مثلثی تشکیل می‌دهند که با آن مثلثها متشابه است.

حالت خاص این قضیه را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه ۶،۳،۳- هرگاه دوی ضلعیهای يك مثلث و در خارج آن سه مثلث متساوی - الاضلاع بسازیم، مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلثها نیز يك مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند.

از قرار معلوم، ناپلئون بناپارت تا اندازه‌ای ریاضیدان بوده و به ویژه علاقه‌ای وافر به هندسه داشته است. می‌گویند پیش از آنکه حکومت فرانسه را در دست گیرد بار ریاضیدانان نامی لاگرانژ و لاپلاس جلسه‌های بحث و گفتگو داشته است. حتی اینکه ریاضیدان اخیر يك بار به طور جدی به او چنین گفته است: «ژنرال، درسی از هندسه، آخرین چیزی است

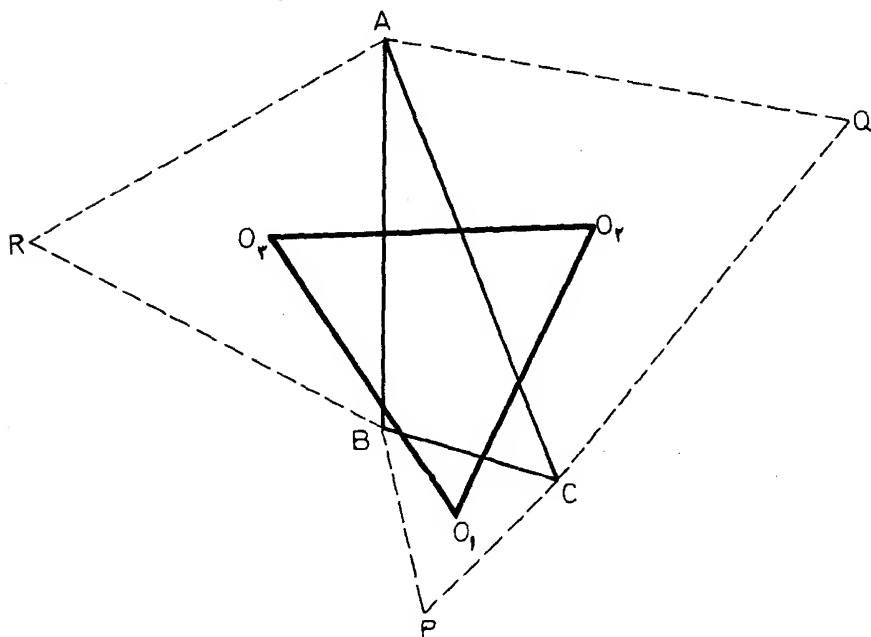
که از شما مورد تمنا است». لاپلاس بعدها مهندس نظامی مخصوص امپراطوری شد. قضیه (۶،۳،۳) را به ناپلئون نسبت می‌دهند، اما در این باره می‌توان شك داشت، زیرا معلومات هندسی او آن اندازه نبوده که به این نتیجه جالب توجه دست یابد؛ چنانکه در انگلیسی جمله دوسویه زیر را به او نسبت می‌دهند:

ABLE WAS I ERE I SAW ELBA

(تقریباً به این مضمون: «قبل از دیدن جزیره الب می‌توانستم»).

به هر ترتیب، در حالتی که مثلثهای متساوی الاضلاع BAR ، CQA ، PCB در خارج مثلث ABC بسازیم و O_1 ، O_2 ، O_3 مرکزهای آن مثلثها باشند، مثلث متساوی الاضلاع $O_1O_2O_3$ را مثلث ناپلئون خارجی نظیر مثلث ABC می‌نامند (شکل ۳،۳، ب)، و در حالتی که مثلثهای متساوی الاضلاع را، مطابق شکل (۳،۳، پ)، در داخل مثلث بسازیم و N_1 ، N_2 ، N_3 مرکزهای آنها باشند، مثلث $N_1N_2N_3$ را مثلث ناپلئون داخلی نظیر مثلث ABC می‌نامند. با این نامگذاری قضیه (۶،۳،۳) چنین بیان می‌شود:

مثلث ناپلئون خارجی نظیر هر مثلث، متساوی الاضلاع است.



(شکل ۳،۳، ب)

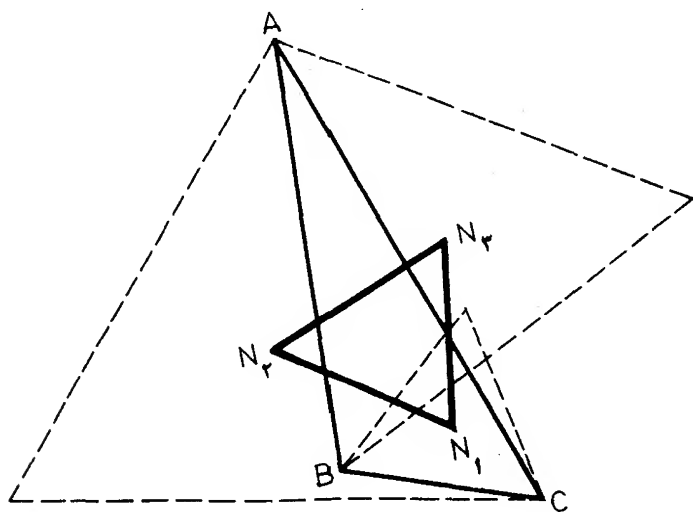
براین قضیه برهانی توسط یگلوم^۱ ارائه شده است که با برهان گفته شده در بالا تفاوت دارد، اما درضمن اثبات قضیه مشابه زیر را نیز دربردارد:

قضیه ۳.۳-۷ مثلث ناپلئون داخلی هر مثلث، همسایه الاضلاع است.

با قرارداد $AC=b$ ، $CB=a$ ، $BA=c$ داریم $AO_3 = \frac{b}{\sqrt{3}}$ و $AO_2 = \frac{c}{\sqrt{3}}$ و چون اندازه زاویه O_3AO_2 برابر $A+60^\circ$ است، بنابه قانون کسینوسها در مثلث AO_3O_2 داریم.

$$\overline{O_3O_2}^2 = \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2 - \frac{2}{3}bc\cos(A+60^\circ)$$

رأسهای N_3 و N_2 از مثلث ناپلئون داخلی به ترتیب قرینه‌های O_3 و O_2 نسبت به



(شکل ۳.۳، پ)

CA و AB می‌باشند و به علاوه زاویه N_3AN_2 برابر است با $A-60^\circ$ و نتیجه می‌شود:

$$\overline{N_3N_2}^2 = \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2 - \frac{2}{3}bc\cos(A-60^\circ)$$

ازدورابطه بالا داریم:

$$\overline{O_3O_2}^2 - \overline{N_3N_2}^2 = \frac{2}{3}bc[\cos(A-60^\circ) - \cos(A+60^\circ)]$$

$$= \frac{4}{3}bc\sin A \sin 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}bc\sin A$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} S(ABC)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\overline{O_1 O_2} - \overline{N_1 N_2} = \overline{O_2 O_1} - \overline{N_2 N_1} = \frac{4}{\sqrt{3}} S(ABC)$$

و چون $O_2 O_3 = O_3 O_1 = O_1 O_2$ پس:

$$N_1 N_3 = N_3 N_1 = N_1 N_2$$

بالاخره چون مساحت مثلث متساوی الاضلاع برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{4}$ برابر مربع يك ضلع

آن ، پس می توانیم نتیجه مهم زیر را بیان کنیم:

قضیه ۸،۳،۳- تفاضل مساحت های دو مثلث ناپلئون خارجی و داخلی نظیر هر مثلث برابر است با مساحت آن مثلث.

دستور صحیح مربوط به این قضیه با در نظر گرفتن جهت نام گذاری مثلثها به صورت

زیر است:

$$S(O_1 O_2 O_3) - S(N_2 N_1 N_3) = S(ABC)$$

به عبارت دیگر:

$$S(O_1 O_2 O_3) + S(N_1 N_2 N_3) = S(ABC)$$

تمرینها

۱- روی دو ضلع از مثلثی و در خارج آن دو مربع می سازیم. ثابت کنید که دایره های محیطی این مربعها و دایره ای که قطرش ضلع سوم مثلث است در يك نقطه متقارند و مرکزهای این سه دایره رأسهای يك مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین می باشند.

۲- با در نظر گرفتن شکل (۳،۳، ب) ثابت کنید که:

الف: سه خط PO_1 و QO_2 و RO_3 در O ، مرکز دایره محیطی مثلث ABC ، متقارند؛

ب: سه خط AO_1 و BO_2 و CO_3 متقارند؛

ج: پاره خطهای AP ، BQ و CR با هم برابرند؛ و به علاوه این سه خط در F ، نقطه مشترک دایره های محیطی مثلثهای ACQ ، BPC و ABR ، متقارند و دایره دو با یکدیگر زاویه 90° می سازند.

(فرما برای نخستین بار ثابت کرده است که مجموع فاصله های FA ، FB ، FC وقتی می نیمم است که هیچیک از زاویه های مثلث ABC از 120° بیشتر نباشد).

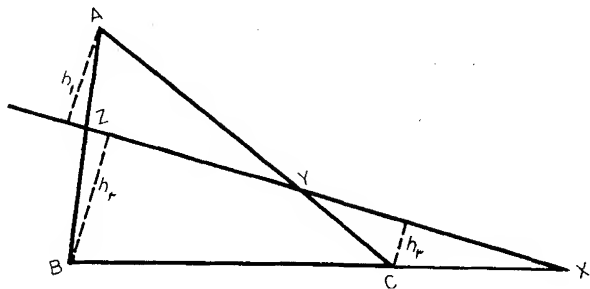
- ۳- با در نظر گرفتن شکل (۳.۳، پ) ثابت کنید که سه خط BN_1 ، AN_1 ، CN_1 متقاربند.
- ۴- ثابت کنید که مثلثهای ناپاکون داخلی و خارجی نظیر هر مثلث هم مرکزند.

۴.۳- قضیه منلائوس

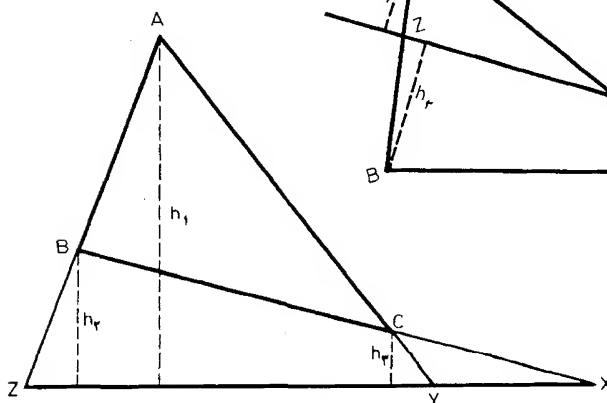
منلائوس^۱ اسکندرانی (قرن اول میلادی)، که نباید با منلائوس اسپارتی اشتباه شود، رساله‌ای به نام «Sphaerica» منتشر کرده که در آن يك ویژگی مثلث کروی ذکر شده بود. و چنین برمی آید که ویژگی مشابه مربوط به مثلث مسطح نیز تا آن موقع شناخته شده بوده است؛ اما هیچ مدرک قدیمی که بر این امر دلالت کند بدست نیامده است. با وجود این، ویژگی مزبور را به شرح زیر به نام قضیه منلائوس بیان می کنیم که متکی به پاره خطهای جهت دار است:

قضیه ۴.۳-۱- هرگاه سه نقطه X ، Y و Z واقع بر ضلعهای BC ، CA و AB (یا واقع بر امتداد آنها) از مثلث ABC بریک خط راست واقع باشند، خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = +1$$



(شکل ۴.۳، ب)



(شکل ۴.۳، الف)

و برعکس، اگر چنین رابطه‌ای برای سه نقطه X, Y, Z واقع بر ضلعها یا امتداد ضلعهای مثلث ABC برقرار باشد، این سه نقطه بزرگ خط راست واقند. فرض می‌کنیم سه نقطه X, Y, Z بزرگ خط راست واقع باشند. بنا به قرارداد، فاصله‌های همه نقطه‌های واقع در یکی از دو نیم صفحه XYZ (مثلا بالای آن) را از خط مزبور مثبت اختیار می‌کنیم و فاصله‌های نقطه‌های واقع در نیم صفحه دیگر آن (پایین آن) را از آن منفی می‌گیریم. با این قرارداد برای هر يك از دو شکل صفحه قبل داریم:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{h_2}{h_3}, \quad \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = \frac{h_3}{h_1}, \quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{h_1}{h_2}$$

از ضرب نظیر به نظیر طرفین این تساویها در یکدیگر رابطه مطلوب بدست می‌آید (یادآوری می‌شود برای آنکه سه نقطه X, Y, Z بزرگ خط راست واقع باشند لازم است که حداقل یکی از آنها بر امتداد ضلعهای مثلث واقع باشد)^۱. برعکس، هر گاه برای سه نقطه X, Y, Z واقع بر ضلعهای مثلث، یا واقع بر امتدادهای آنها، داشته باشیم:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = +1$$

به فرض آنکه Z' نقطه برخورد AB با XY باشد داریم:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}} = +1$$

از مقایسه دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}}$$

۱- یادداشت از ج. غیور: اگر در اثبات قضیه منلائوس به ترتیبی که ذکر شده برای راستای خطهای عمود بر مورب جهت قائل شویم اثبات قضیه منطقی‌تر می‌شود و از رابطه منلائوس بعد از اثبات نتیجه می‌شود که مورب یا امتداد هر سه ضلع یا دو ضلع و امتداد ضلع سوم را قطع می‌کند.

بنابراین Z' بر Z منطبق است، یعنی سه نقطه X و Y و Z بر یک خط راست واقعند.^۱ قضیه منلائوس در اثبات اینکه چند نقطه بر یک خط راست واقعند مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنچنانکه قضیه سوا (بندهای ۱، ۲، ۳ و ۴) در اثبات تقارب چند خط بکار می‌رود. برای رفع تفاوت می‌توانیم رابطه منلائوس را چنین بنویسیم:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -1$$

تمرینها

- ۱- ثابت کنید که در هر مثلث، نیمسازهای زاویه‌های خارجی امتدادهای ضاعهای مقابل را در سه نقطه واقع بر یک خط راست قطع می‌کنند.
- ۲- ثابت کنید که در هر مثلث، پاهای نیمسازهای دوزاویه داخلی و پای نیمساز زاویه خارجی رأس دیگر سه نقطه واقع بر یک خط راست می‌باشند.

۵.۳- قضیه پاپوس^۲

قضیه زیر یکی از مهمترین قضیه‌های هندسه مسطحه است که نخستین بار توسط پاپوس اسکندرانی در حدود سال ۳۰۰ میلادی بیان شده است. شانزده قرن پس از بیان قضیه، اهمیت اساسی آن در هندسه تصویری معلوم گردید. بی‌مورد نیست که پاپوس را خاتم هندسه دانان بزرگ گذشته می‌نامند.

قضیه منسوب به پاپوس را به گونه‌های مختلف می‌توان بیان کرد. یکی از آنها چنین است:

قضیه ۵.۳-۱- سه نقطه A, C, E بر یک خط راست و سه نقطه دیگر F, D, B بر خط راست دیگر واقعند، هرگاه خطهای AB, CD, EF با خطهای FA, DE, BC به ترتیب در L, M, N برخورد کنند، این سه نقطه بر یک خط راست واقعند.

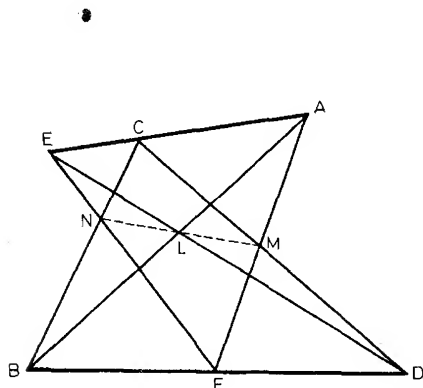
در این قضیه که فقط موضع هندسی مطرح است و اندازه‌های پاره‌خطها یا زاویه‌ها

۱- در آثار ریاضی دوره اسلامی شکل حاصل از مثلث ABC و مورب XYZ را رویهم‌شکل قطاع گفته و رابطه منلائوس را به صورت

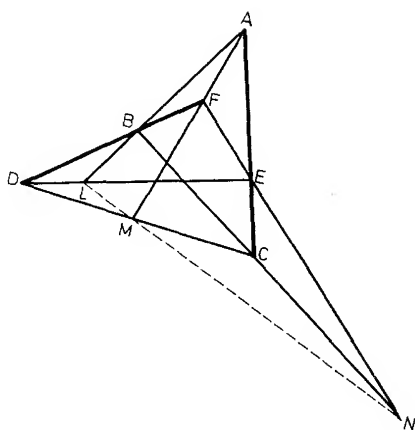
$$\frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} = \frac{ZB}{AZ}$$

نوشته آن را نسبت مؤلف نامیده‌اند. مترجم

دخالتی ندارد، همچنین رعایت ترتیب در میان نیست یعنی در هر يك از مجموعه‌های سه نقطه مهم نیست که کدام بین دو تاي دیگر واقع است، ویژگی تصویر عرض وجود می‌کند.



(شکل ۵.۳، الف)



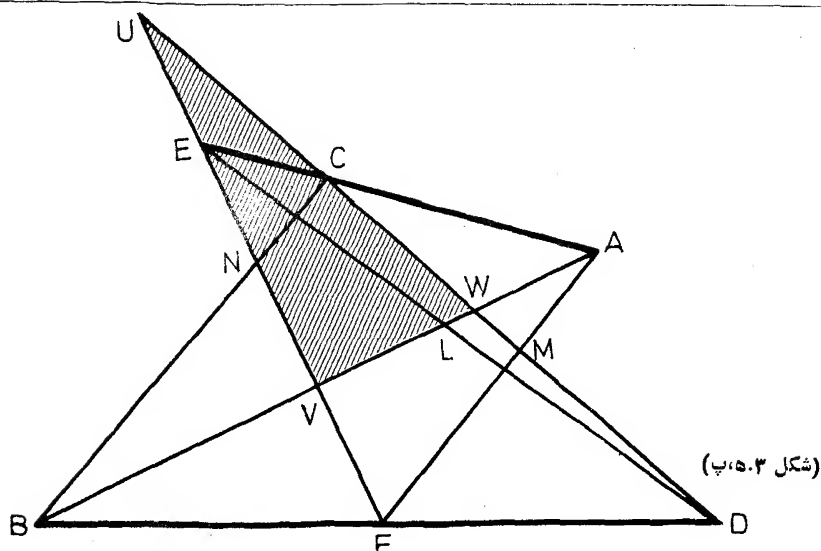
(شکل ۵.۳، ب)

شکلهای (۵.۳، الف) و (۵.۳، ب) دو وضع ممکن از نقطه‌های مفروض را نشان می‌دهد، و البته شکلهای دیگری نیز می‌توان در نظر گرفت. می‌توان جایگشتهای مختلف نقطه‌های A، B، C، D، E، F را اختیار کرد و در هر حالت نقطه‌های L، M و N را تعیین کرد. برای پرهیز از حالتی که نقطه‌ها در بینهایت واقع شوند، که این چنین حالتی را بعدها در زمینه هندسه تصویری بررسی خواهیم کرد، فعلا فرض می‌کنیم که مطابق شکل (۵.۳، ب) سه خط AB، CD و EF مثلث UVW را تشکیل می‌دهند با بکار بردن قضیه متلائوس برای هر يك از پنج مجموعه سه نقطه‌ای:

$$LDE, AMF, BCN, ACE, BDF$$

که هر کدام از آنها برضلعهای مثلث UVW واقعند خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{VL}}{\overline{LW}} \cdot \frac{\overline{WD}}{\overline{DU}} \cdot \frac{\overline{UE}}{\overline{EV}} &= -1, & \frac{\overline{VA}}{\overline{AW}} \cdot \frac{\overline{WM}}{\overline{MU}} \cdot \frac{\overline{UF}}{\overline{FV}} &= -1, \\ \frac{\overline{VB}}{\overline{BW}} \cdot \frac{\overline{WC}}{\overline{CU}} \cdot \frac{\overline{UN}}{\overline{NV}} &= -1, & \frac{\overline{VA}}{\overline{AW}} \cdot \frac{\overline{WC}}{\overline{CU}} \cdot \frac{\overline{UE}}{\overline{EV}} &= -1, \\ \frac{\overline{VB}}{\overline{BW}} \cdot \frac{\overline{WD}}{\overline{DU}} \cdot \frac{\overline{UF}}{\overline{FV}} &= -1 \end{aligned}$$



(شکل ۵.۳ پ)

حاصل ضرب طرفین سه تساوی اول را بر حاصل ضرب طرفین دو تساوی دیگر تقسیم می‌کنیم، پس از ساده کردن حاصل خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{LW}} \cdot \frac{\overline{WM}}{\overline{MU}} \cdot \frac{\overline{UN}}{\overline{NV}} = -1$$

از این رابطه بنا به عکس قضیهٔ منلائوس نتیجه می‌شود که سه نقطه L و M و N بر یک خط راست واقعند.

[یادداشت از ح. غیور: اگر نامگذاری نقطه‌های قضیهٔ پاپوس را به ترتیب زیر قرار دهیم، صورت قضیه و برهان آن بیشتر قابل فهم و جالبتر می‌شود:

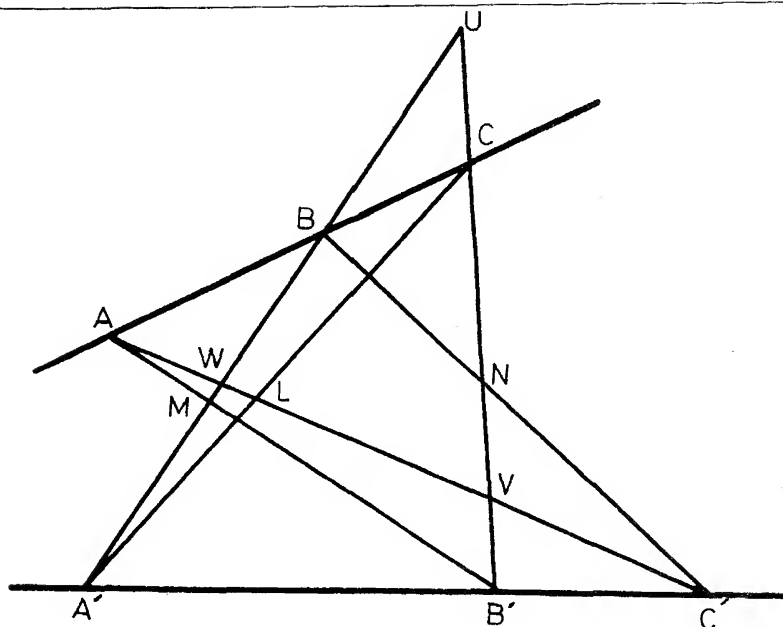
قضیه: سه نقطه A ، B ، C بر یک خط راست و سه نقطه A' ، B' ، C' بر خط راست دیگر واقعند. اگر L ، M ، N به ترتیب نقطه برخورد $(CA'$ و $AC')$ ، $(AB'$ و $BA')$ ، $(CB'$ و $BC')$ باشند، این سه نقطه بر یک خط راست واقعند.

از تقاطع دوباره دو AB' و BA' و CB' و BC' مثلث UVW پدید می‌آید. نسبت به این مثلث برای موربهای $LA'C$ ، $MB'A$ و $NC'B$ به ترتیب داریم:

$$\frac{\overline{LV}}{\overline{LW}} \cdot \frac{\overline{A'W}}{\overline{A'U}} \cdot \frac{\overline{CU}}{\overline{CV}} = -1$$

$$\frac{\overline{MW}}{\overline{MU}} \cdot \frac{\overline{B'U}}{\overline{B'V}} \cdot \frac{\overline{AV}}{\overline{AW}} = -1$$

$$\frac{\overline{NU}}{\overline{NV}} \cdot \frac{\overline{C'V}}{\overline{C'W}} \cdot \frac{\overline{BW}}{\overline{BU}} = -1$$



از ضرب دوطرف تساویهای بالا درهم بدست می‌آید:

$$\frac{\overline{LV}}{\overline{LW}} \cdot \frac{\overline{MW}}{\overline{MU}} \cdot \frac{\overline{NU}}{\overline{NV}} \cdot \frac{\overline{A'W} \cdot \overline{CU} \cdot \overline{B'U} \cdot \overline{AV} \cdot \overline{C'V} \cdot \overline{BW}}{\overline{A'U} \cdot \overline{CV} \cdot \overline{B'V} \cdot \overline{AW} \cdot \overline{C'W} \cdot \overline{BU}} = -1$$

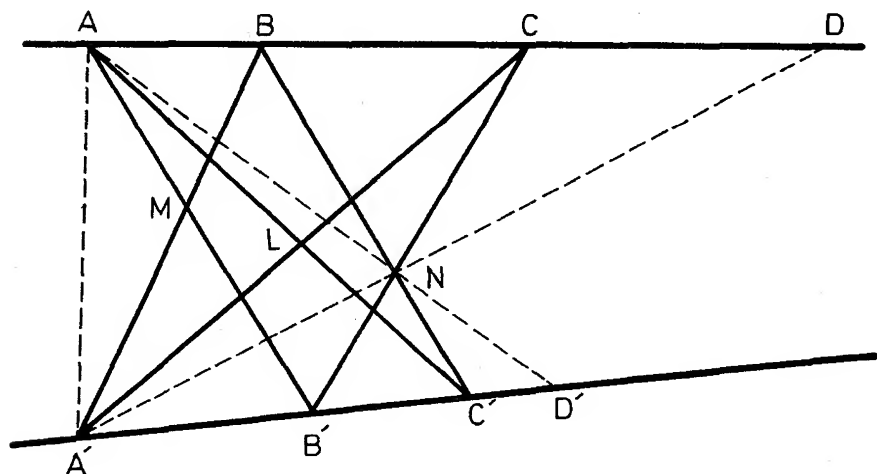
دو رابطه منلائوس برای موربهای $A'B'C'$ و ABC را نیز نوشته و دوطرف آنها را درهم ضرب می‌کنیم. از مقایسه رابطه‌ای که بدست می‌آید با رابطه بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{LV}}{\overline{LW}} \cdot \frac{\overline{MW}}{\overline{MU}} \cdot \frac{\overline{NU}}{\overline{NV}} = -1$$

(بدیهی است که برای اثبات قضیه شکل دیگر لازم نیست، زیرا نقطه‌ها و خط‌ها به هر ترتیب واقع باشند به شرط آنکه نامهای نقطه‌های نظیر تغییر نکنند، اثبات همان است که نوشته شده است. این برهان همان برهان کتاب است فقط نام نقطه‌ها تغییر کرده است.) این جانب (حسین غیور) در سالها پیش به کمک نسبت ناهمسازی، برهان دیر را برای اثبات قضیه پاپوس پیدا کرده‌ام: از A به A' و به N وصل می‌کنیم تا دستگاه ناهمسا $(A, A'B'C'D')$ پدید آید. دستگاه ناهمسا $(N, A'B'C'D')$ را در نظر می‌گیریم و آن را با خط AB قطع می‌کنیم:

$$(A'B'C'D') = (DCBA) = (ABCD)$$

دو دستگاه ناهمسا با نسبت برابر $(A, ABCD)$ و $(A, A'B'C'D')$ بدون دو



شعاع نظیر AA' و $A'A$ برهم منطبق است و M و L و N نقطه‌های تقاطع شعاعهای نظیر $(AB', A'B)$ و $(AC', A'C)$ و $(AD', A'D)$ بریک خط راست قرار دارند.]

تمرینها

۱- سه نقطه A, C, E بریک خط راست و سه نقطه B, D, F برخط راست دیگر واقعند. هرگاه خطهای AB و CD به ترتیب با خطهای DE و FA موازی باشند، ثابت کنید که EF نیز با BC موازی است.

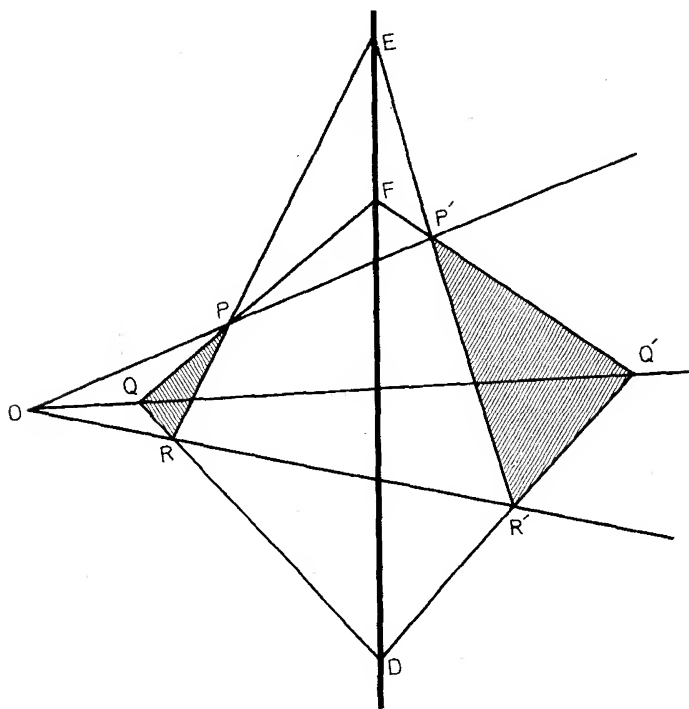
۲- هرگاه نقطه‌های A, B, D, E, N, M چنان باشند که خطهای AE, DM ، NB در P و خطهای AM, DB, NE در Q متقارب باشند، خطهای AB, DE ، NM نسبت به هم چه وضعی خواهند داشت؟

۳- نقطه‌های C و F به ترتیب روی ضلعهای AE و BD از متوازی‌الاضلاع $AEBD$ واقعند. خطهای CD و FA در M و خطهای EF و BC در N برخورد می‌کنند. هرگاه P نقطه برخورد MN با DA و Q نقطه برخورد MN با EB باشد، ثابت کنید که $AP = QB$.

۴- روی شکل (۵.۳، الف)، یا روی شکل (۵.۳، ب) چند خط و چند نقطه یافت می‌شود؟ برهریک از نقطه‌ها چند خط می‌گذرد؟ روی هر یک از خطها چند نقطه واقع است؟

۶.۳- مشتملهای همسان^۱ - قضیه دزارگ^۲

نظریه هندسی پرسپکتیو (= مناظر و مرايا) نخستین بار توسط آرشیتمکت ایتالیائی فیلیپو برنلهچی^۳ (۱۴۴۶-۱۴۷۷) به میان آمده است. باید گفت که طرح گنبد هشت ترک کلیسای اعظم فلورانس و همچنین کاخ پیتی از این آرشیتمکت است. آرشیتمکت دیگر، ذیاد دزارگ^۴ (۱۶۶۱-۱۵۹۱) نظریه را دنبال کرد و روی آن تحقیق کامل انجام داد. دیری نپایید که قضیه معروف «دومثلث» که توسط دزارگ بیان شده بود اهمیتی همچون قضیه پاپوس بدست آورد. درحقیقت می توان قضیه دزارگ را با دشواریهایی از قضیه پاپوس نتیجه گرفت، اما با استفاده از قضیه منلائوس اثبات آن به سادگی انجام می گیرد. هر گاه بین دوشکل پدیدآمده از نقاط و خطوط، چنان تناظری وجود داشته باشد که هر جفت نقطه نظیر هم برخطهای متقارب واقع باشند می گوئیم که آن دوشکل مرکزهمسانی



(شکل ۶.۳، الف)

۱- Homologique

۲- Desargues

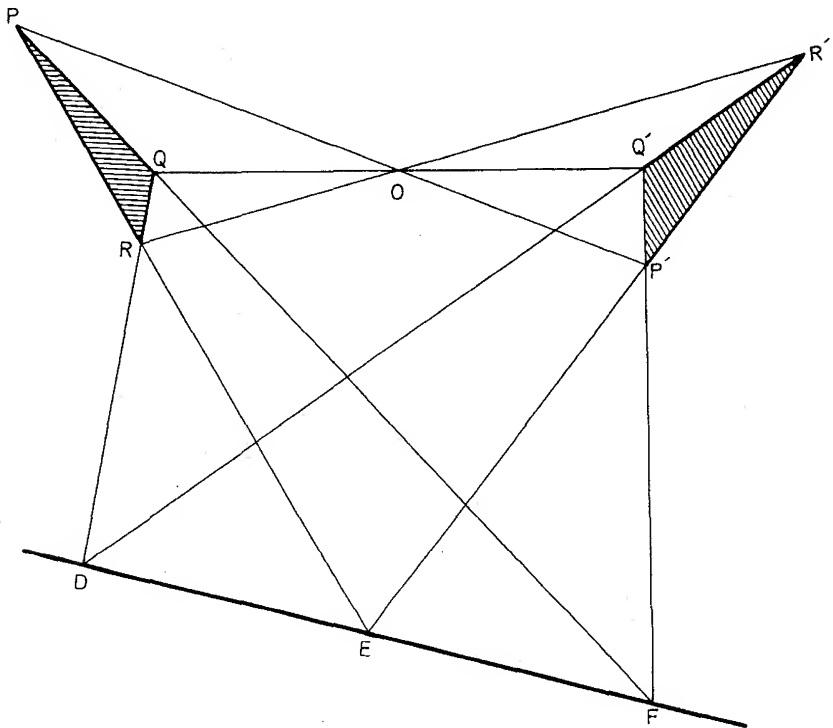
۳- Filippo Brunelleschi

دارند. هرگاه تناظر بین دوشکل چنان باشد که هر جفت خط نظیر هم در نقاط واقع بريك خط متقاطع باشند می‌گوئیم که آن دوشکل محوره‌مسانی دارند. از نظر هندسه تصویری، بیان قضیه دو مثلث دزارگ چنین است: هرگاه دو مثلث، مرکز همسانی داشته باشند محور همسانی نیز خواهند داشت. اما برای پردیز از پیچیدگی‌هایی که در حالت توازی خطها بوجود می‌آید، قضیه مزبور را چنین بیان می‌کنیم:

قضیه ۱، ۶.۳- هرگساه دو مثلث همسان باشند ضلعهای متناظر آنها متقاطع باشند، نقطه‌های تقاطع ضلعها بريك خط راست واقعند.

در این قضیه نیز منحصراً وضع نقاط و خطوط دخالت دارد و برای آن شکلهای مختلف می‌توان رسم کرد. شکلهای (۶.۳، الف) و (۶.۳، ب) دو حالت از شکلهای ممکن را نشان می‌دهد. دو مثلث PQR و $P'Q'R'$ در همسانی به مرکز O متناظرند و ضلعهای متناظر آنها در E ، D و F متقاطعند.

با استفاده از قضیه منلائوس برای مجموعه‌های سه نقطه‌ای $EP'R'$ ، $DR'Q'$ ، $FQ'P'$ که روی ضلعهای مثلثهای OQR ، ORP و OPQ واقعند، خواهیم داشت:



(شکل ۶.۳، ب)

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{RR'}}{\overline{OR'}} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{QQ'}} = +1$$

$$\frac{\overline{RE}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}} \cdot \frac{\overline{OR'}}{\overline{RR'}} = +1$$

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{QF}} \cdot \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}} \cdot \frac{\overline{OP'}}{\overline{PP'}} = +1$$

از ضرب نظیر به نظیر طرفین این تساویها و پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{RE}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{QF}} = +1$$

بنا به عکس قضیه منلائوس نتیجه می شود که سه نقطه D ، E و F بر یک خط راست واقعند. عکس قضیه دزارگ در حالت کلی چنین بیان می شود: هرگاه دو مثلث محور همسانی داشته باشند مرکز همسانی نیز خواهند داشت. اما در اینجا عکس قضیه را چنین بیان می کنیم: قضیه ۲،۶،۳ - هرگاه دو مثلث محور همسانی داشته باشند و رأسهای متناظر آنها بر خطهای متقارب واقع باشند، نقطه تقارب خطها مرکز همسانی دو مثلث است.

همانگونه که در شکلهای قبلی مشاهده می شود، دو مثلث PQR و $P'Q'R'$ دارای محور همسانی می باشند و ضلعهای QR و $Q'R'$ در D ، ضلعهای RP و $R'P'$ در E ، ضلعهای PQ و $P'Q'$ در F برخورد می کنند و سه نقطه D ، E ، F بر یک خط راست واقعند. هرگاه O نقطه برخورد خطهای PP' و RR' باشد، باید ثابت کنیم که O و Q و Q' بر یک خط راست واقعند. اما دو مثلث FPP' و DRR' دارای مرکز همسانی E می باشند، پس بنا به قضیه (۳، ۶، ۱) نقطه های برخورد ضلعهای متناظر آنها، یعنی O (خطهای PP' و RR')، Q' (خطهای $P'F$ و $R'D$)، Q (خطهای FP و DR)، سه نقطه واقع بر یک خط راست می باشند. آنچه گفته شد برهانی مطلقاً «تصویری» بود.

تمرینها

۱- هرگاه دو مثلث مرکز همسانی داشته باشند و دو جفت از ضلعهای متناظر آنها با

هم موازی باشند، يك جفت ضلعهای دیگر آنها نیز با هم موازیند (در این حالت ، که در تمرین ۳ از بند ۲۰۱ نیز بیان شده، دو مثلث متجانس نامیده می‌شوند).

۲- در شکل (۶.۳، الف)، یا در شکل (۶.۳، ب)، چند خط و چند نقطه یافت می‌شود؟ روی هريك از خطها چند نقطه وجود دارد؟

۳- در همان شکلها ، دو مثلث بیابید که مرکز همسانی آنها عبارت باشد از:
الف: P ، ب: P' ، پ: D

۴- دربارهٔ ضلعها و رأسهای دو پنج ضلعی DFP'OR و EPOQ'R' چه می‌توان گفت؟ آیا روی شکل، پنج ضلعهای دیگری با همان خاصیت وجود دارد؟

۵- روی صفحهٔ کاغذ دو خط غیر موازی چنان رسم شده‌اند که نقطهٔ برخورد آنها در خارج از برگ کاغذ می‌افتد، و P نقطه‌ای است روی صفحه در بخش واقع بین دو خط. از P خطی چنان رسم کنید که با دو خط مقروض متقارب باشد. راه‌حل را برای حالتی که دو خط موازی باشند تفسیر کنید.

۷.۳- شش ضلعیها

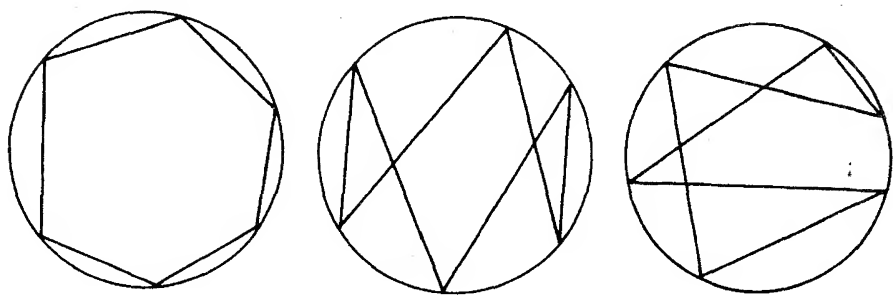
در هر شش ضلعی ، دو رأس را مجاور، يك درمیان یا دوربرو می‌گوئیم بر حسب آنکه يك ضلع، دو ضلع یا سه ضلع بین آنها واقع باشد. در شش ضلعی ABCDEF نسبت به رأس A ، رأسهای B و F با آن مجاورند ، رأسهای C و E با آن يك درمیانند. و رأس D با آن دوربروست. پاره‌خط و اصل بین دو رأس روبرو را قطر و ضلعهای واقع بین دو جفت رأسهای روبرو را ضلعهای روبرو می‌نامیم. در شش ضلعی گفته شده قطرها عبارتند از AD ، BE و CF و ضلعهای روبرو عبارتند از AB و DE ، BC و EF ، CD و FA .

يك شش ضلعی داده شده را با شش حرف A ، B ، C ، D ، E و F به دوازده نوع می‌توانیم نامگذاری کنیم؛ هر رأس را که A بنامیم بر حسب اینکه کداميك از رأسهای مجاورش را B بنامیم شش ضلعی را می‌توانیم به دو گونه نامگذاری کنیم و چون برای رأس A شش انتخاب داریم پس رویهم به دوازده گونه می‌توانیم رأسها را نامگذاری کنیم.

هر گاه شش نقطهٔ غیر واقع بريك خط داده شده باشد، با $۷۲۰ = ۶!$ حالت می‌توان حرفهای A ، B ، C ، D ، E و F را به آنها نسبت داد و چون شش ضلعی را به ۱۲ گونه می‌توانیم نامگذاری کنیم، پس تعداد شش ضلعیهای متمایز که با شش نقطهٔ معلوم می‌توانیم

بسازیم برابر می‌شود با: $۶۰ = \frac{۷۲۰}{۱۲}$. در شکل (۷.۳، الف) سه گونه از ۶۰ گونه شش-

ضلعیهایی که از به هم وصل کردن شش نقطه واقع بر یک دایره بدست می آید مشاهده می شود.



شکل (۱۷۰۳، ۱)

شکل سمت چپ که شش ضلعی محدب است برای ما آشنا تر از دو شکل دیگر، و بطور کلی آشنا تر از ۵۹ گونه دیگر، می باشد.

در بند ۱۰۳ یادآوری شد که در یک چند ضلعی هیچیک از مجموعه های سه رأس متوالی نمی توانند بر یک خط راست واقع باشند. اما برای مجموعه های سه تایی رأسهای یک درمیان شش ضلعی وضع چنین نیست و به ویژه می توانیم قضیه پاپوس (قضیه ۵۰۳، ۱) را چنین بیان کنیم:

هرگاه در یک شش ضلعی سه رأس دوه دو یک درمیان بر یک خط راست واقع باشند و هرگاه سه جفت ضلعهای دوه دو دوه دو متقاطع باشند، سه نقطه تقاطع آنها بر یک خط راست واقعند.

تمرینها

۱- در شش ضلعی $ABCDEF$ ضلعهای روبروی BC و EF با قطر AD موازیند. و همچنین ضلعهای روبروی CD و FA با قطر BF و ضلعهای روبروی DE و AB با هم موازیند. ثابت کنید که قطر CF با AB موازی است و مرکزهای ثقل دو مثلث ACE و BDF بر هم منطبقند.

۲- دو مجموعه سه تایی نقطه های واقع بر یک خط را در نظر می گیریم. این دو مجموعه را بد چند گونه می توانیم رأسهای یک درمیان یک شش ضلعی اختیار کنیم؟

۸.۳- قضیه پاسکال

فیلسوف و ریاضیدان مشهور بلز پاسکال^۱ (۱۶۶۲-۱۶۲۳) قضیه زیر را در شانزده سالگی ثابت کرده است:

قضیه ۱۸۰۳- در هر شش ضلعی محاطی نقاط تقاطع ضلعهای دوبرو بريك خط راست واقعند.

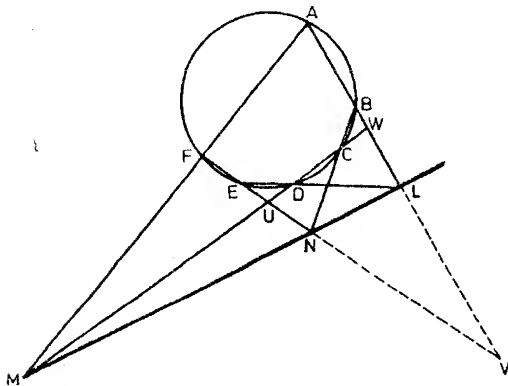
چگونگی اثبات این قضیه توسط پاسکال برهیچکس معلوم نیست زیرا راه حل وی بدست نیامده است؛ فقط ژ. د. لایب نیر^۱ (که همزمان با نیوتن حساب دیفرانسیل و انتگرال را وضع کرده است) آن را دیده و از آن با ستایش یاد کرده است. این موضوع می تواند انگیزه‌ای باشد تا با توجه به روشهای متداول زمان پاسکال و معلومات آن دوره در جستجوی روش اثبات وی بر آییم. چنانکه فودرد^۲ به چنین کاری دست زد و کوشید تا فقط با استفاده از سه مقاله اول هندسه اقلیدس قضیه را ثابت کند. اما روش اثبات بسیار پیچیده و دشوار بود و واضح ساخت که پاسکال بایستی با استفاده از قضیه منلائوس، با روشی مشابه روش زیر، به اثبات قضیه نایل آمده باشد.

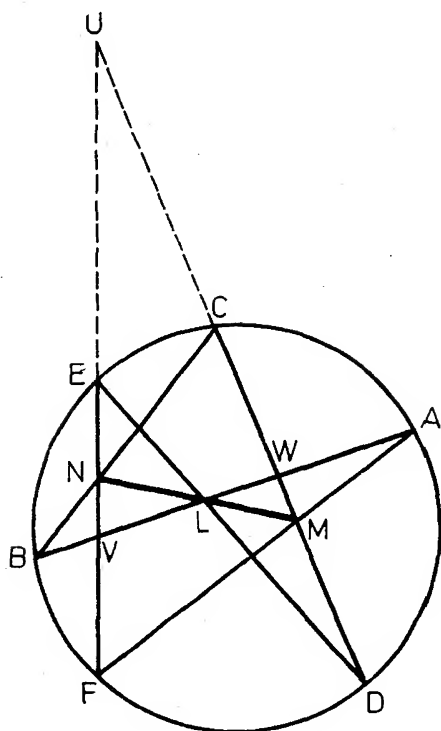
در پیش دیدیم که يك شش ضلعی محاطی را به ۶۰ شکل گوناگون می توان رسم کرد. قضیه را برای شکل (۸۰۳، الف) ثابت می کنیم. خواننده می تواند چگونگی تطبیق اثبات را با ۵۹ شکل گونه دیگر خود انجام دهد.^۳

1- G.W. Leibniz. 2- Forder.

۳- یادداشت از ج. غیور؛ قضیه‌ای زا که در اثبات آن اندازه پاره خطها و مساحتها با عددی مثبت و منفی نموده شده است، يك برهان برای شکل مفروض در تمام شکلهای مربوط صدق می کند به شرط آنکه نقطه‌های نظیر را با يك حرف نشان دهیم (هرگاه در شکلی دو خط متقاطع به صورت دو خط متوازی در آیند ممکن است تصور شود حکم فوق درست نیست، در صورتی که اغلب در این حالت هم چون از اصل دزارگ برای خطهای موازی استفاده شود باز حکم صحیح است).

و انکهی، اگر اثبات قضیه را برای شش ضلعی محدب بنویسیم برای دانش آموز یادگیری آن سریعتر انجام می گیرد و آن را دیرتر فراموش می کند. شکل (۸۰۳، الف) برای شش ضلعی محدب در زیر رسم شده است و برهان متن کتاب برای آن صادق است





(شکل ۸.۳، الف)

درشش ضلعی محاطی $ABCDEF$
 ضلعهای روبروی AB و DE در L ،
 ضلعهای روبروی CD و FA در M
 ضلعهای روبروی BC و EF در N
 برخورد می کنند، باید ثابت کنیم که
 سه نقطه L ، M ، N بر یک خط راست
 واقعند. خطهای AB ، CD و EF
 مثلث UVW را تشکیل می دهند.
 نسبت به موربهای LDE ، AMF و
 BCN برای مثلث نامبرده بنا به قضیه
 منلائوس داریم:

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{WL}} \cdot \frac{\overline{WD}}{\overline{UD}} \cdot \frac{\overline{UE}}{\overline{VE}} = +1$$

$$\frac{\overline{VA}}{\overline{WA}} \cdot \frac{\overline{WM}}{\overline{UM}} \cdot \frac{\overline{UF}}{\overline{VF}} = +1$$

$$\frac{\overline{VB}}{\overline{WB}} \cdot \frac{\overline{WC}}{\overline{UC}} \cdot \frac{\overline{UN}}{\overline{VE}} = +1$$

طرفین این تساویها را درهم ضرب می کنیم و چون بنا به قضیه (۱۰.۲) داریم:

$$\frac{\overline{WD}}{\overline{UD}} \cdot \frac{\overline{UE}}{\overline{VE}} \cdot \frac{\overline{VA}}{\overline{WA}} \cdot \frac{\overline{UF}}{\overline{VF}} \cdot \frac{\overline{VB}}{\overline{WB}} \cdot \frac{\overline{WC}}{\overline{UC}} =$$

$$\frac{\overline{UE} \times \overline{UF}}{\overline{UC} \times \overline{UD}} \cdot \frac{\overline{VA} \times \overline{VB}}{\overline{VE} \times \overline{VF}} \cdot \frac{\overline{WC} \times \overline{WD}}{\overline{WA} \times \overline{WB}} = +1$$

نتیجه خواهد شد که:

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{WL}} \cdot \frac{\overline{WM}}{\overline{UM}} \cdot \frac{\overline{UN}}{\overline{VN}} = +1$$

بنا بر این سه نقطه L و M و N بر يك خط راست واقعند.

خط شامل سه نقطه L ، M و N را خط پاسکال نظیر شش ضلعی $ABCDEF$ می‌نامند، و چون با شش نقطه شصت نوع شش ضلعی مشخص می‌شود پس برای شش نقطه واقع بر يك دایره تعداد شصت خط پاسکال وجود خواهد داشت. مجموعه این خطها خود وضع جالبی دارد؛ برخی از آنها متقاربند و نقطه‌های تقارب بر يك خط راست واقعند، و ویژگیهای دیگر.

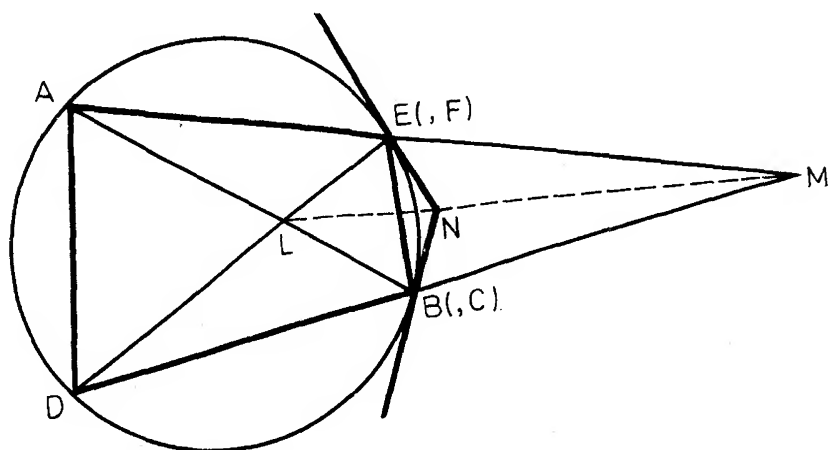
پاسکال با بررسیهای مختصری که در بارهٔ مقطعهای مخروطی انجام داده به این نکته توجه داشته است که قضیه گفته شده دربارهٔ شش ضلعی محاط در يك مقطع مخروطی نیز صادق است.

عکس قضیه پاسکال که توسط ویلیام بره‌کینریج^۲ و کلین مک‌لودن^۳ جداگانه و مستقلاً به اثبات رسیده و در کتابهای مربوط به هندسه تصویری مندرج است، به شرح زیر می‌باشد:

هرگاه سه نقطه تقاطع ضلعهای دوبرو از يك شش ضلعی بر يك خط راست واقع باشند آن شش ضلعی در يك مقطع مخروطی محاط است. این شش ضلعی در حالت خاص به دوخط تبدیل می‌شود (مانند قضیه ۱۰۵۰۳).

هرگاه برخی از رأسهای شش ضلعی را برهم منطبق کنیم در این صورت با استفاده از قضیه پاسکال، قضیه‌های جالبی برای پنج ضلعیها و چهار ضلعیهای محاطی نتیجه می‌شود. وقتی دو رأس شش ضلعی محاطی به سمت هم میل کنند ضلع بین آنها به يك نقطه و خط محمل این ضلع به مماس بردایره در این نقطه تبدیل می‌شود. مثلاً هرگاه رأسهای B و C و همچنین رأسهای E و F از شش ضلعی $ABCDEF$ برهم منطبق باشند، مطابق شکل (۸۰۳، ب)، چهار ضلعی محاطی $ADBE$ را خواهیم داشت. هرگاه مماسهای بردایره محیطی این

۱- این راه اثبات که در نتیجه جستجو برای تعیین راه اثبات پاسکال انجام گرفته در چاپ هیجدهم کتاب هندسه تألیف ژنودود اسپیکر (Théodor Spicker) چاپ ۱۸۸۸ در پوتسدام مشاهده شده است. همچنین در کتاب «شش ضلعی پاسکال» تألیف مؤلفان این کتاب نیز مندرج است. بالاخره کتاب «کوششی برای نوسازی این کشف» اثر دانشمند جوان ژولیت کبک (Joliette Québec) چاپ ۱۹۶۳ نیز این برهان را شامل است.



(شکل ۸.۳، ب)

چهار ضلعی در نقاط E و B با هم در N برخورد کنند و L نقطه برخورد قطرهای AB و DE ، و M نقطه برخورد ضلعهای AE و DB باشد، بنا به قضیه پاسکال نتیجه می شود که سه نقطه N, M, L بر یک خط راست واقعند.

تمرینها

۱- هرگاه سه نقطه نقاط ضلعهای روبه روی یک شش ضلعی بر یک خط راست واقع باشند و هرگاه دایره ای بر پنج رأس آن بگذرد، ثابت کنید که این دایره بر رأس دیگر آن نیز می گذرد.

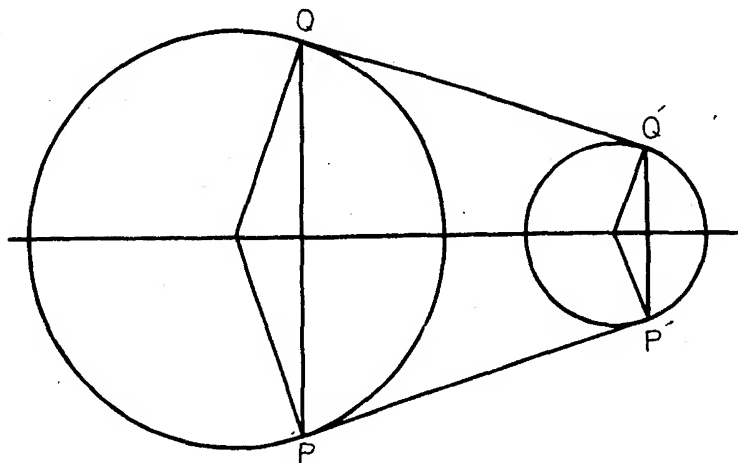
۲- پنج ضلعی $ABCDE$ در دایره ای محاط است. مماسهای بردایره در نقاط A و C با یکدیگر در L برخورد می کنند و M نقطه برخورد AB با CE و N نقطه برخورد AE با BC است. ثابت کنید که سه نقطه N, M, L بر یک خط راست واقعند.

۹.۳- قضیه بریانشن

ث. پویدانشن^۱ (۱۷۶۰-۱۸۵۴) قضیه مهمی مربوط به شش ضلعی محیطی را ثابت کرده است که رابطه ای ظریف با قضیه پاسکال دارد. روشی که او برای اثبات قضیه بکار برده متکی بر «اصل دو گانگی» است که از جمله اصول هندسه تصویری است. جستجوی اثبات اقلیدسی قضیه برای حالتی که مقطع مخروطی به صورت دایره باشد به مسئله جالبی منجر شد که راه حل آن توسط ا. س. اسموگودزوسکی^۲ ارائه گردید. اما قبل از بیان این راه حل

به بیان و اثبات لم به شرح زیر می‌پردازیم:

بر دایره‌ای دو نقطه P و Q را انتخاب و در این دو نقطه مماسهایی بر دایره رسم می‌کنیم. هرگاه روی مماس در نقطه P ، نقطه P' و روی مماس در نقطه Q ، نقطه Q' را چنان برگزینیم که $PP' = QQ'$ و هر دو نقطه P' و Q' در یک طرف خط PQ باشند،



(شکل ۹.۳، الف)

در این صورت دایره‌ای وجود خواهد داشت که در P' بر خط PP' و در Q' بر خط QQ' مماس می‌باشد.

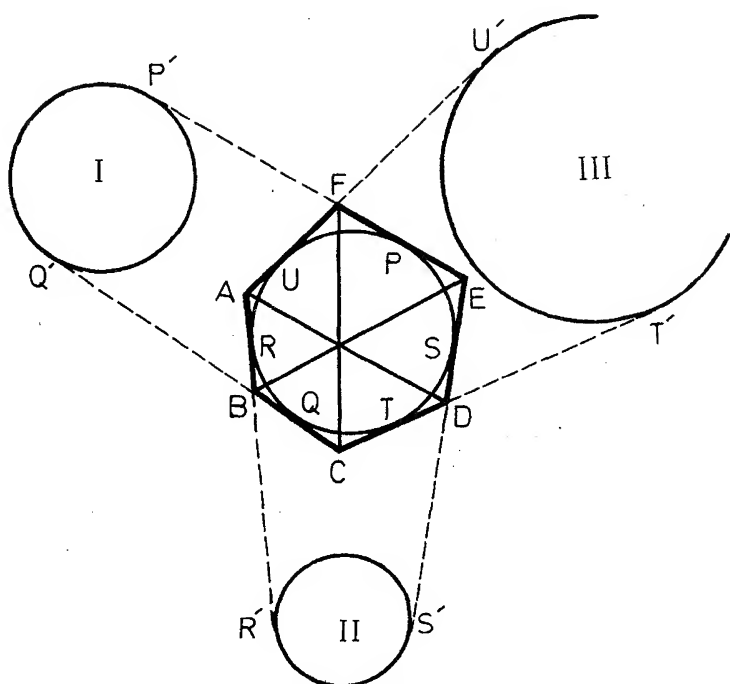
عمود منصف PQ که از مرکز دایره مفروض می‌گذرد محور تقارن شکل است پس عمود منصف $P'Q'$ نیز می‌باشد. عمودهایی که در P' و Q' به ترتیب بر PP' و QQ' رسم شوند روی محور تقارن شکل برخورد می‌کنند که این نقطه مرکز دایره مطلوب است. اکنون قضیه اسموگودزوسکی را بیان و اثبات می‌کنیم:

قضیه ۹.۳-۱- هرگاه ضلعهای یک شش ضلعی بر دایره‌ای مماس باشند سه قطر این شش ضلعی یا متقارند و یا متوازیند.

نقطه‌های تماس ضلعهای AB, BC, CD, DE, EF, FA را با دایره به ترتیب R, Q, T, S, P, U می‌نامیم و برای سادگی شش ضلعی $ABCDEF$ را محذب برمی‌گزینیم که در نتیجه قطرهای AD, BE, CF نمی‌توانند متوازی باشند. مطابق شکل (۹.۳، ب) روی امتدادهای ضلعهای شش ضلعی نقطه‌های Q', P', R', S', T', U' را چنان انتخاب می‌کنیم که:

$$PP' = QQ' = RR' = SS' = TT' = UU'$$

بنابر لم یاد شده سه دایره I (مماس بر PP' و QQ' در P' و Q')، II



(شکل ۹.۳، ب)

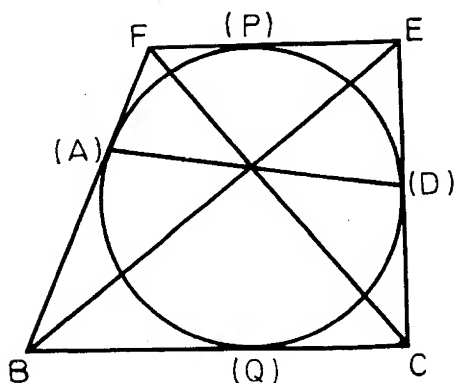
(مماس بر RR' و SS' در R' و S') و III (مماس بر TT' و UU' در T' و U') را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که مماسهایی که از یک نقطه بر دایره‌ای رسم شوند باهم برابرند، یعنی $AR = AU$ و چون داشتیم $RR' = UU'$ پس نتیجه می‌شود که $AR' = AU'$. هر یک همچنین داریم $DS = DT$ و $SS' = TT'$ که نتیجه می‌شود $DS' = DT'$. هر یک از دو نقطه A و D نسبت به دو دایره II و III دارای یک قوتند پس خطی که بر این دو نقطه می‌گذرد، یعنی خط AD ، محور اصلی این دو دایره است. به طریق مشابه ثابت می‌شود که BE محور اصلی دو دایره I و II، و CF محور اصلی دو دایره I و III است. چنانکه قبلاً دیده‌ایم (بند ۳.۲) محورهای اصلی دو به دوی سه دایره غیر متعلق به یک دسته دوایر متقاربند (یا اینکه متوازی‌اند). باید توجه داشت که دایره‌های I و II و III نمی‌توانند به یک دسته دوایر متعلق باشند و همچنین قطرهای شش ضلعی نمی‌توانند منطبق باشند، بنابراین برهان گفته شده بدون خلل است.

عکس قضیه که ناشی از هندسه تصویری است چنین بیان می‌شود:

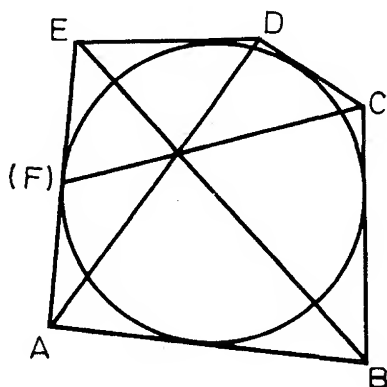
هرگاه سه قطر یک شش ضلعی متقارب باشند، ضلعهای این شش ضلعی بزرگ مقطع مخروطی مماس می‌باشند که حالت خاص تبدیل مقطع مخروطی به یک زوج نقاط منفی است.

می‌توانیم تصور کنیم که در شش ضلعی محیطی يك رأس یا دورأس مجاور روی ضلع نظیر حرکت کرده به سمت نقطه تماس این ضلع با دایره میل می‌کنند. در این صورت قضیه‌هایی مشابه با قضیه بریانشن برای پنج ضلعی محیطی و چهار ضلعی محیطی را نتیجه می‌گیریم.

مثلاً پنج ضلعی محیطی $ABCDE$ ، شکل (۹.۳، پ) را که F نقطه تماس ضلع AE با دایره است می‌توانیم شش ضلعی محیطی $ABCDEF$ تصور کنیم که در آن زاویه رأس F يك زاویه نیم صفحه است. در این صورت بنا به قضیه بریانشن قطرهای AD و BE با خط CF که رأس C را به F وصل می‌کند، متقارب هستند.



شکل (۹.۳، ت)



شکل (۹.۳، پ)

همچنین چهار ضلعی محیطی $BCEF$ ، شکل (۹.۳، ت) را که در آن A نقطه تماس ضلع BF و D نقطه تماس ضلع CE با دایره است می‌توان شش ضلعی محیطی $ABCDEF$ تصور کرد و بنا به قضیه بریانشن نتیجه گرفت که دو قطر BE و CF و خط AD ، که نقطه‌های تماس دوضلع روبرو را به هم وصل می‌کند، متقاربند.

تمرینها

- ۱- در شکل (۹.۳، ت)، ثابت کنید خط PQ که نقطه‌های تماس دوضلع روبروی BC و EF با دایره را به هم وصل می‌کند از نقطه تقاطع دو قطر چهار ضلعی می‌گذرد.
- ۲- هرگاه چهار ضلعی شکل (۹.۳، ت) را شش ضلعی محیطی $ABQCEF$ تصور کنیم، خطهای متقارب کدامها می‌باشند؟
- ۳- آیا با استفاده از قضیه بریانشن راه حل دیگری برای تمرین ۳ از بند ۴.۱ بنظر می‌آید؟

تبدیل شکلها

خنوخ^۱ به خاطر ایمانش منتقل شد تا مرگ را ملاقات نکند، و او را نیافتند، زیرا که خدا او را منتقل کرده بود. در حقیقت، قبل از انتقالش به وی اعلام شده بود که مقرب خدا است. مکتوب به عبرانیان، ۵، ۱۱

در پایان بند ۱، ۶، خاطر نشان کردیم که زاویه قائمه بین OB و FD (شکل ۱، ۶، الف) مبدل زاویه قائمه بین CB و HD است، پس از آنکه این دو خط به ترتیب حول B و D به زاویه α دوران کرده باشند. همچنین در پیشگفتار قضیه ۷، ۱، یادآوری کردیم که دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند که در مرکز ثقل مشترکند و O و H مرکزهای ارتفاعی آنها می باشند و نتیجه گرفتیم که $AH = 2OA'$. بالاخره با استفاده از تبدیلی به نام نیم دور بود که توانستیم پس از قضیه ۱، ۸، مرکزهای ارتفاعی دو مثلث $A'B'C'$ و KLM را به یکدیگر بدل کنیم.

دوران، تشابه، نیم دور، نمونه هایی از تبدیلات هندسی اند، تبدیل هندسی (در چهارچوب این کتاب) عبارتست از گسترشی^۲ از صفحه روی خودش به قسمی که نظیر هر نقطه P از این صفحه تصویر منحصر به فرد آن P' وجود داشته باشد و هر نقطه Q' از صفحه، تصویر منحصر به فرد يك نقطه Q باشد. این مفهوم گسترش در بسیاری از شاخه های ریاضی نقش اساسی دارد؛ چنانکه با نوشتن $v = f(x)$ مجموعه مقادیر نظیر x را نشان می دهیم.

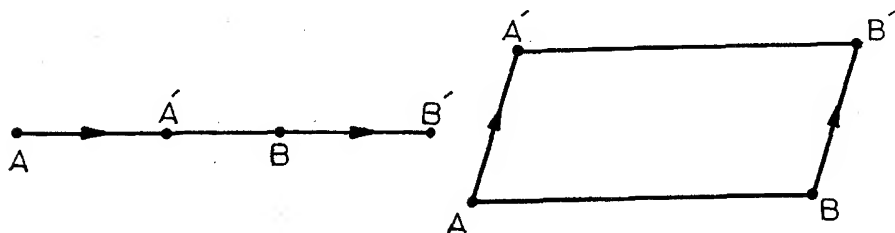
۱- Hénoc یا Énoch که به زبان عبری خنوخ می باشد به روایت تورا هفتمین نسل آدم است و به خاطر تقرب خاص به درگاه خدا بدون آنکه بمیرد به بهشت منتقل شد. بعضی از علمای اسلامی او را همان ادیسی پیغمبر دانسته اند. مترجم

هندسه اقلیدسی یکی از هندسه‌هایی است که هر کدام با مفاهیم اساسی خود، اصول و قضایا، مشخص می‌شود. در ۱۸۷۲، فلیکس کلین^۱ در طرح مشهورش راجع به دانشگاه ارلانگن^۲ با تقسیم‌بندی هندسه‌ها بر حسب گروه‌های تبدیلات آنها را بازسازی کرد بدون آنکه در مفاهیم اصول و قضایا اصلاحاتی انجام گیرد. به‌ویژه هندسه اقلیدسی بر حسب گروه تشابهات مشخص شده بود، یعنی بر مبنای تبدیلاتی که اندازه زاویه‌ها را محفوظ می‌دارد. هم‌اندازی^۳ حالت مهمی از تشابه است که علاوه بر اندازه زاویه، فاصله را نیز محفوظ می‌دارد، مانند دوران و حالت ویژه آن نیم‌دور. هم‌اندازی مبتنی بر مفهوم متعارف برازی است: دو شکل با هم برابرند اگر فقط اگر بتوان بایک هم‌اندازی از یکی به دیگری رسید.

۱.۴- انتقال^۴

صرف نظر از عمل همانی^۵ که همه نقاط را در وضع اولیه ثابت نگاه می‌دارد، انتقال ساده‌ترین تبدیلی است که فاصله بین دو نقطه و همچنین امتداد خط واصل بین آنها را محفوظ می‌دارد.

در انتقالی که $A'B'$ مبدل پاره خط AB باشد، یا A', B, A' بر یک خط راست واقعند (شکل ۱.۴، الف) و یا اینکه $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است (شکل ۱.۴، ب). در حالت اول (شکل ۱.۴، الف) نیز می‌توان گفت که $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع حالت خاص است. بنابراین، انتقال با بردار $\overrightarrow{AA'}$ ، یا اینکه با بردار دیگر همسنگ آن، مثل



(شکل ۱.۴، الف)

(شکل ۱.۴، ب)

$\overrightarrow{BB'}$ ، مشخص شده است. عمل همانی را می‌توانیم حالت خاص انتقال بدانیم که با بردار صفر مشخص می‌شود.

با استفاده از ویژگیهای انتقال که ریخت شکل و فواصل را ثابت می‌دارد می‌توان

۱- Félix Klein.

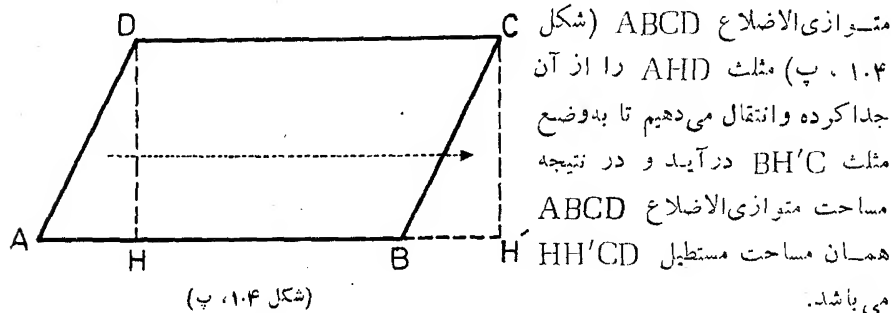
۲- Erlangen.

۳- Isométrie.

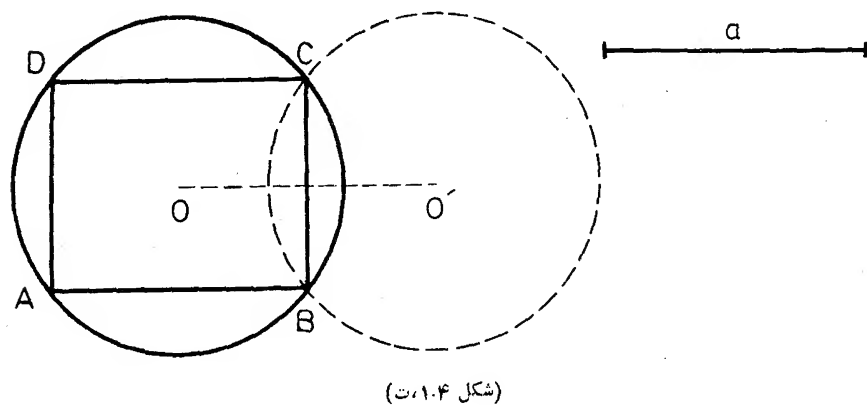
۴- Translation.

۵- Identique.

انواع قضیه‌های مربوط به مساحتها را ثابت کرد، چنانکه برای بدست آوردن فرمول مساحت



در شکل (۱۰۴، ت) نیز مشاهده می‌شود که چگونه از انتقال برای حل مسئله زیر استفاده شده است: در دایره داده شده مستطیلی چنان محاط کنید که ضلع آن با پاره‌خط مفروض a برابر و هم‌امتداد باشد.



این راه حل به این ترتیب است که دایره داده شده O را به بردار \vec{a} انتقال می‌دهیم تا به دایره O' تبدیل شود. هرگاه B و C نقطه‌های برخورد دو دایره باشد، از این نقطه‌ها موازی با a رسم می‌کنیم تا دایره داده شده را در A و D قطع کنند.

تمرینها

۱- مثلث ABC و پاره‌خط a داده شده است. در مثلث پاره‌خطی چنان محاط کنید که با a برابر و هم‌امتداد باشد.

۲- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را متوالیاً با برادرهای $k \cdot AB$ ، $k \cdot BC$ ، $k \cdot CA$ انتقال می‌دهیم کس k عدد صحیح نسبی است. قسمتی از شکل حاصل را رسم کنید.

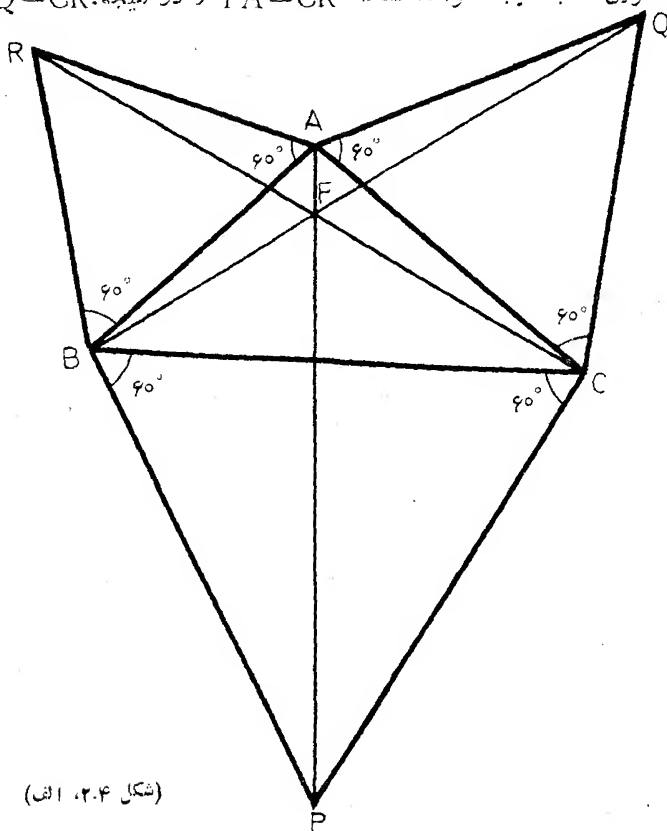
۲.۴- دوران

دوران نوع دیگری از تبدیلاتی است که فواصل را محفوظ می‌دارد. در دوران هر يك از نقطه‌های شکل را حول نقطه ثابت و بدزاویه معین می‌گردانیم. بنابراین ابعاد و ریخت شکلهای در هر دوران محفوظ می‌ماند؛ اما نقطه‌ها روی دایره‌های هم‌مرکز تغییر جا می‌دهند. تنها نقطه‌ای که در دوران ثابت می‌ماند مرکز دوران است که ممکن است یکی از نقاط شکل دوران یافته باشد یا اینکه به آن تعلق نداشته باشد.

برای بیان مثالی از مورد استعمال دوران در حل مسائل. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و روی هر يك از ضلعهای آن و در خارج مثلث. مثلثی متساوی‌الاضلاع بنامی کنیم که مثلثهای متساوی‌الاضلاع BPC ، CQA و ARB بدست می‌آید (شکل ۲.۴، الف). با رسم خطهای BQ و CR ملاحظه می‌کنیم که در دوران به زاویه ۶۰° و به مرکز A مثلث ARC به مثلث ABQ تبدیل می‌شود. نتیجه می‌شود که

$$RC = BQ \text{ و } \widehat{RFB} = ۶۰^\circ$$

به طریق مشابه نتیجه خواهد شد که $PA = CR$ و در نتیجه: $AP = BQ = CR$



(شکل ۲.۴، الف)

همچنین:

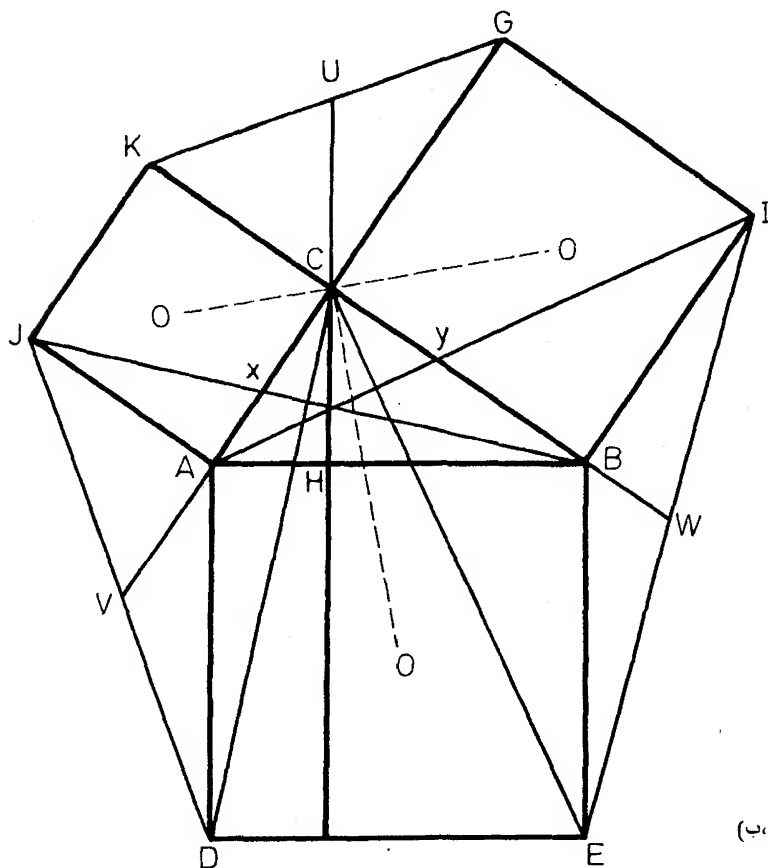
$$\widehat{RFB} = 60^\circ = \widehat{RAB}$$

$$\widehat{CFQ} = 60^\circ = \widehat{CAQ}$$

از اینرو چهار گوشه‌های $ARBF$ و $CQAF$ محاطی اند. چون $\widehat{BFC} = 120^\circ$

و $\widehat{CPB} = 60^\circ$ پس چهار گوشه $BPCF$ نیز محاطی است. بنابراین دایره‌های محیطی مثلثهای BPC و CQA و ARB در نقطه F مشترکند که این نقطه را نقطه فرما نظیر مثلث ABC می‌نامند. از اینکه دایره‌های گفته شده در F مشترکند نتیجه می‌شود که هر یک از شش زاویه بد رأس F برابر 60° است و چون F نقطه برخورد BQ با CR انتخاب شده بود پس AP نیز بر F می‌گذرد. بنابراین سه خط AP ، BQ ، CR متقارند و با هم برابر می‌باشند.

در اثبات قضیه فیثاغورس که توسط اقلیدس بیان شده است، مطابق باشک (ب.۲.۴)



(شکل ۲.۴ ب)

روی ضلعهای مثلث قائم الزاویه ABC و در خارج آن مربعهای CBIG ، BADE و ACKJ را می سازیم و ارتفاع CH از مثلث، مربع بد ضلع AB را به دو مستطیل تقسیم می کند. در دوران به مرکز A و به زاویه 90° مثلث ADC به مثلث ABJ تبدیل می شود. پس $BJ = DC$ و BJ بر DC عمود است. همچنین ثابت می شود که AI و CE با هم برابر و برهم عمودند.

بسیار آخره از تشابه دو مثلث BCX و BKJ و همچنین دو مثلث CAY و GAI رابطه های زیر بدست می آید:

$$\frac{CX}{b} = \frac{CX}{KJ} = \frac{BC}{BK} = \frac{a}{a+b} \quad \text{و} \quad \frac{CY}{a} = \frac{CY}{GI} = \frac{CA}{GA} = \frac{b}{a+b}$$

از این رابطه ها بدست می آید که:

$$CX = \frac{ab}{a+b} = CY$$

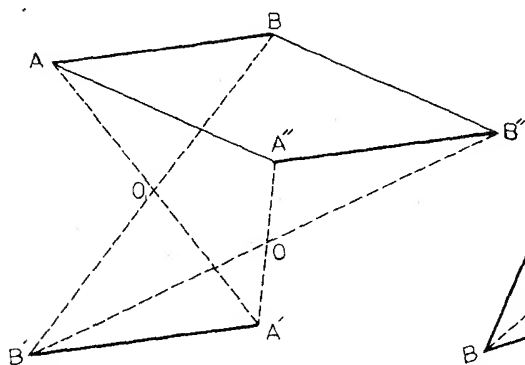
تمرینها

- ۱- روی ضلعهای يك متوازی الاضلاع و در خارج آن چهار مربع می سازیم. ثابت کنید که مرکزهای این چهار مربع رأسهای يك مربع می باشند.
- ۲- با توجه به شکل (۲.۴ ، ب) ثابت کنید که:
(الف) سه خط AI ، BJ و CH متقارند.
(ب) پاره خطهای O_1O_2 و CO_3 با هم برابر و برهم عمودند.
(پ) نقطه های U ، V ، W به ترتیب وسطهای GK ، JD ، EI می باشند.
- ۳- مثلث متساوی الاضلاعی چنان رسم کنید که نقطه داده شده در داخل آن واقع شده و از رأسهای آن به فاصله های ۲، ۳ و ۴ باشد.

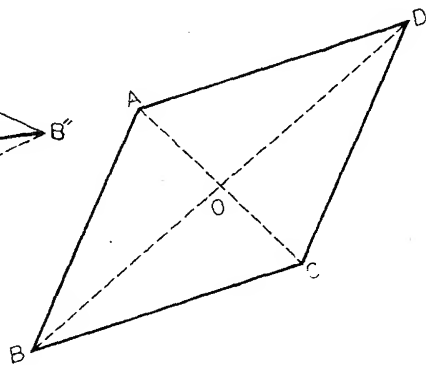
۳.۴- نیم دور (= تقارن مرکزی)

نوعی از دوران دارای این خاصیت است که همانند انتقال هر خط را به خط موازی با خودش، اما در جهت معکوس، تبدیل می کند؛ این نوع دوران را نیم دور می نامیم. نیم دور دوران با زاویه 180° است که نام دیگر آن تقارن مرکزی است و با معلوم بودن مرکزش مشخص می شود. حاصل دو نیم دور معادل با يك انتقال است، زیرا در نتیجه آن هر خط به خط موازی با خودش و در همان جهت تبدیل می گردد (به ویژه اگر مرکزهای دو نیم دور برهم منطبق باشند نتیجه ترکیب آنها عملی همانی است، یعنی شکل را به خودش تبدیل می کند). هرگاه A ، B ، C سه نقطه واقع بر يك خط و B وسط AC باشد؛ نیم دور به مرکز A جای این نقطه را عوض نمی کند و نیم دور به مرکز B نقطه A را

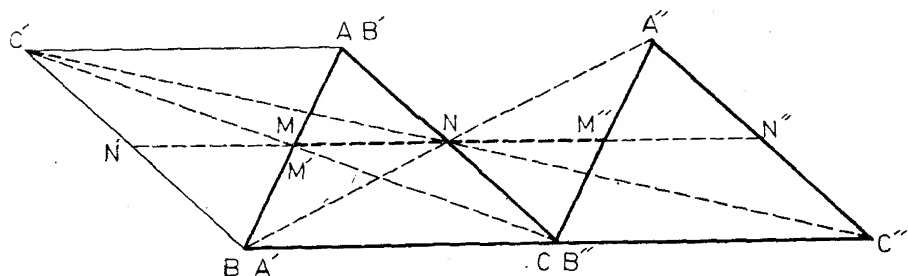
بر نقطه C منطبق می‌سازد، پس حاصل این دو نیم‌دور با انتقال AC معادل است. همین انتقال با حاصل دو نیم‌دور متوالی بد مرکزهای B و C نیز معادل است.



(شکل ۳.۴ . الف)



(شکل ۳.۴ . ب)



(شکل ۳.۴ . پ)

در شکل (۳.۴ الف) مشاهده می‌شود که در نتیجه دو نیم‌دور متوالی بد مرکزهای O_1 و O_2 پاره خط AB بد پاره خط $A''B''$ تبدیل شده است که معادل است با انتقال $\vec{AA''}$ یا $\vec{BB''}$.

هرگاه O وسط مشترک دو پاره خط AC و BD باشد (شکل ۳.۴ ب)، در نیم‌دوره مرکز O پاره خط AB بد پاره خط CD تبدیل می‌گردد که با آن مساوی و موازی است، پس $ABCD$ متوازی الاضلاع است.

در شکل (۳.۴ پ) M وسط AB و N وسط AC است. نیم‌دوره مرکز M مثلث ABC را به مثلث $A'B'C'$ تبدیل می‌کند که در آن M' نظیر M بر M

واقع است و N' نظیر N در وسط $A'C'$ می باشد. در نیم دور به مرکز N مثلث $A'B'C'$ به مثلث $A''B''C''$ و M' به M'' تبدیل می شود. حاصل این دو نیم دور انتقال به بردار $\overrightarrow{BB''}$ یا $\overrightarrow{MM''}$ است. بنا بر این $BC = MM''$ و نتیجه می گیریم که MN با BC موازی و با نصف آن برابر است.

تمرینها

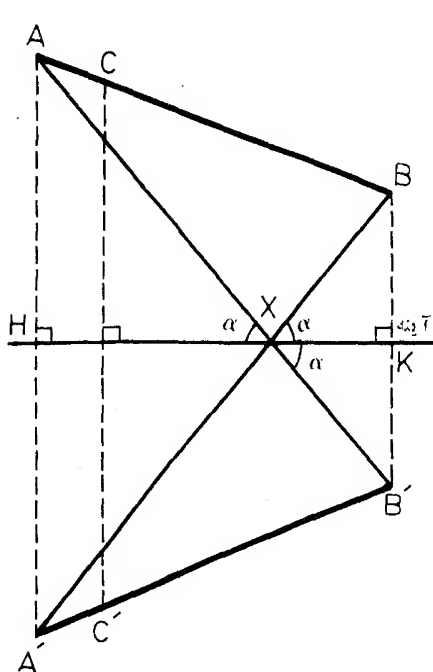
- ۱- دو دایره در A مشترکند. از A خطی چنان رسم کنید که توسط دو دایره به دو بخش برابر تقسیم شود.
- ۲- دایره ای و یک نقطه A در خارج آن واقع است. از A خطی چنان رسم کنید که دایره را در P و Q قطع کند به قسمی که $AP = PQ$.
- ۳- دو ضلع مقابل یک شش ضلعی با هم مساوی و موازیند. ثابت کنید که قطرهای اصلی این شش ضلعی متقارند.

۴.۴- تقارن محوری

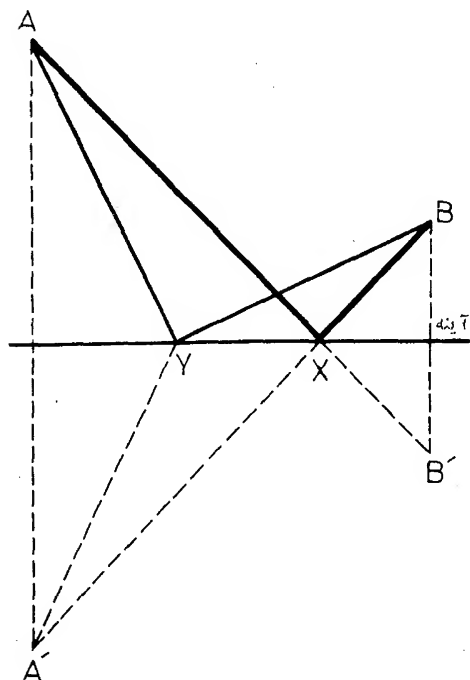
تقارن نسبت به یک محور که آن را تقارن محوری می نامیم، نوع دیگری از تبدیلاتی است که فواصل را محفوظ می دارد. در تقارن محوری هر نقطه واقع بر محور. مانند H یا K (شکل ۴.۴، الف) ثابت می ماند. به عبارت دیگر قرینه خودش می باشد. هر گاه HK را نمای آینده ای تصور کنیم که صفحه آن بر صفحه شکل عمود باشد. تصویر نقطه A نقطه A' است به قسمی که اولاً AA' بر آینه - یعنی بر محور تقارن - عمود می باشد و ثانیاً اگر H پای این عمود روی محور تقارن باشد طوایف HA' و HA با هم برابرند. در شکل (۴.۴، الف) خط AB و تصویر آن $A'B'$ مشاهده می شود. تصویر هر نقطه C از AB بر $A'B'$ واقع است که با C' نموده شده است. و هر نقطه C' تصویر نقطه ای مانند C از AB می باشد. چهار گوشه $ABB'A'$ دوزنقه متساوی الساقین است و دو قطر آن AB' و $A'B$ که تصویرهای یکدیگرند در نقطه X روی محور تقارن برخورد می کنند. زاویه های AXH و $B'XK$ با هم برابرند. مثلث $B'XK$ متساوی الساقین است و زاویه های $B'XK$ و $B'XK$ با هم برابرند. بنا بر این:

$$\widehat{ANH} = \widehat{KNB}$$

خط شکسته AXB مسیر نوری را نشان می دهد که پس از خروج از A و بازتاب در سطح آیند از B می گذرد. مطابق شکل (۴.۴، ب) نقطه دیگر Y را بر سطح آینه در نظر می گیریم. ملاحظه می کنیم که:



(شکل ۴.۴ ، الف)



(شکل ۴.۴ ، ب)

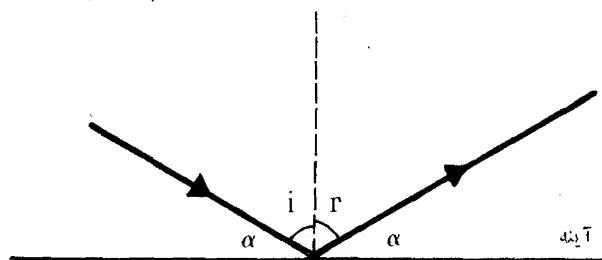
$$AX + XB = A'X + XB = A'B$$

$$AY + YB = A'Y + YB > A'B$$

یعنی طول مسیر AXB کوتاهتر از طول مسیر AYB است، و چون نقطه Y به اختیار برگزیده شده است، پس طول AXB کوتاهترین مسیری است که از A شروع می‌شود و پس از برخورد با سطح آینه به B می‌رسد.

آنچه گفته شد یکی از مسائل مشهور مربوط به ماکزیمم و مینیمم است که با استفاده از تقارن محوری، بدون نیاز به محاسبات پیچیده، به سادگی حل می‌شود. این مسئله مشهور هندسی از نظریه‌ی یکی چنین بیان می‌شود: مسیر نوری که پس از خروج از A و بازتاب در سطح آینه به B می‌رسد چنان است که برای پیمودن آن کمترین زمان صرف می‌شود. به عبارت دیگر، مسیری که نور در یک محیط همگن می‌پیماید با زمانی که صرف پیمودن آن می‌شود متناسب است. همچنین نتیجه می‌گیریم شعاع نوری که از A خارج و پس از بازتاب در سطح آینه به B می‌رسد، به هنگام رسیدن به سطح آینه زاویه‌ای با آن می‌سازد که برابر است با زاویه‌ای که پس از خروج با سطح آینه می‌سازد. هرگاه در نقطه برخورد نور با سطح آینه عمودی بر این سطح اخراج کنیم، مطابق با شکل (۴.۴، ب) از برابری دو زاویه α نتیجه می‌شود که زاویه‌های i و r نیز با هم برابرند. زاویه i را زاویه

تابش و زاویه r را زاویه بازتاب می نامند. پس شعاع نور پس از برخورد با سطح آینه تخت چنان منعکس می شود که زاویه های تابش و بازتاب باهم برابرند.



(شکل ۴.۴، پ)

تمرینها

۱- فرض می کنیم ضلعهای مثلث ABC همانند آینه نور را منعکس می کنند. نقطه P را بر ضلع AB چنان انتخاب کنید که شعاع نور خارج شده از P پس از بازتاب روی ضلعهای BC و CA به نقطه P برگردد و پس از بازتاب روی ضلع AB همان مسیر قبلی را پیماید.

دانهمایی: بند ۶.۱ را ملاحظه کنید.

۲- در مثلثی قاعده و مساحت اندازه های ثابت دارند. ثابت کنید که محیط این مثلث وقتی می نیمم است که آن مثلث متساوی الساقین باشد.

۳- تمرین ۱ از بند ۳.۴ را با استفاده از تقارن محوری حل کنید.

۵.۴- مسئله فاگنانو

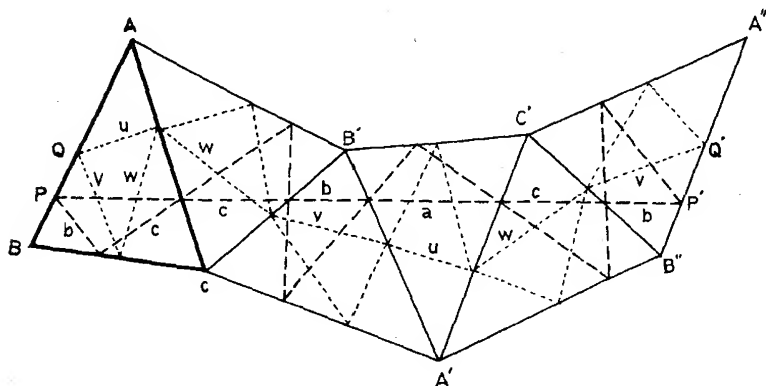
با استفاده از تقارن محوری بسیاری از مسائل مهم را می توان از راهی ساده تر و کوتاه تر حل کرد. برای نمونه مسئله فاگنانو به شرح زیر را ذکر می کنیم: در مثلث مفروض با زاویه های حاده مثلثی با محیط می نیمم محاط کنید^۲.

برای حل مسئله، مطابق با شکل (۵.۴، الف)، در مثلث مفروض و باز زاویه های حاده ABC دو مثلث محاطی در نظر می گیریم: یکی مثلث ارتفاعی آن (که در شکل به صورت خط چین رسم شده) و دیگری مثلثی دایخواه (که در شکل به صورت نقطه چین رسم شده است). مثلث ACB' قرینه مثلث ABC را نسبت به ضلع AC رسم می کنیم، آنگاه

۱- Fagnano.

۲- فاگنانو این مسئله را در ۱۷۷۵ مطرح ساخت و خودش از راه محاسبه آن را حل کرد. راه حلی که در اینجا عرضه می شود توسط H. A. Schwarz انجام گردیده که روش آن توسط Frank Morley و F. V. Morley برای $2n+1$ ضلعی تعمیم یافته است.

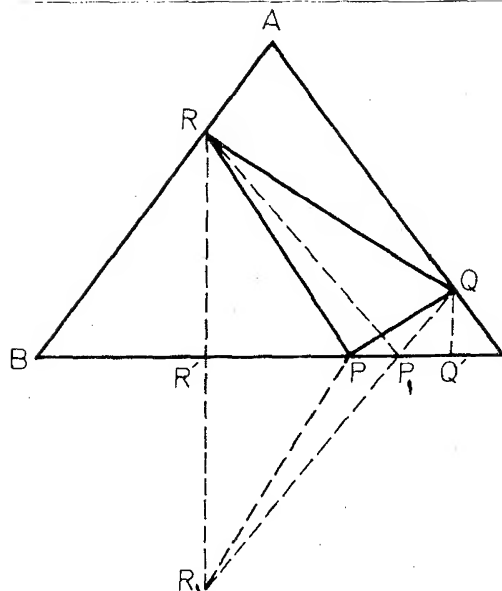
مثلث $A'B'C'$ قرینه مثلث ACB' را نسبت به ضلع CB' ، سپس مثلث $A'B'C'$ قرینه مثلث $A'B'C'$ را نسبت به $A'B'$ ، پس از آن مثلث $A'C'B''$ قرینه مثلث $A'B'C'$ را نسبت به ضلع $A'C'$ و بالاخره مثلث $C'A''B''$ قرینه مثلث $A'C'B''$ را نسبت به ضلع $C'B''$ رسم می‌کنیم.



(شکل ۵.۴ الف)

اکنون شکل بدست آمده را بررسی می‌کنیم. صفحه را جهت دار می‌گیریم و ملاحظه می‌کنیم که اندازه‌های زاویه‌های خط شکسته $BAB'A'B''A''$ در رأس A برابر $2A$ ، در رأس B' برابر $2B$ ، در رأس A' برابر $2A$ ، در رأس B'' برابر $2B$ — است که مجموع آنها صفر می‌شود. نتیجه می‌شود که $B''A''$ با BA موازی است و در نتیجه چهارضلعی $PP'Q'Q$ متوازی‌الاضلاع است. می‌دانیم که ارتفاعهای مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعی نظیر آن می‌باشند، نتیجه می‌گیریم که در تبدیلهای تقارنی بالا ضلعهای مثلث ارتفاعی مثلث ABC متوالیاً برخط PP' قرار دارند. در صورتی که در همین تبدیلهای تقارنی ضلعهای مثلث محاطی دیگر متوالیاً برخط شکسته QQ' واقع شده‌اند. اما PP' با QQ' برابر است و خط راست QQ' از خط شکسته QQ' کوچکتر است. از طرفی طول PP' برابر است با دو برابر محیط مثلث ارتفاعی و طول خط شکسته QQ' دو برابر محیط مثلث محاطی است. بنابراین محیط مثلث ارتفاعی از محیط مثلث محاطی اختیاری کوچکتر است. پس از بین مثلثهای محاط در مثلث ABC مثلث ارتفاعی کمترین محیط را دارد.

[یادداشت از ح. غیور: دو نمونه راه حل دیگر برای مسئله فاگنانون:



راه حل اول - برای آنکه محیط

مثلث PQR محاط در مثلث ABC می نیمم باشد، باید هر ضلع از مثلث ABC نیمساز زاویه خارجی مثلث PQR باشد. با قبول اینکه مثلث PQR جواب مسئله است، فرض می کنیم ضلع BC نیمساز خارجی زاویه QPR نباشد؛ P_1 را روی ضلع BC طوری اختیار می کنیم که BC نیمساز خارجی زاویه RP_1Q باشد. برای این منظور R_1 قرینه R

نسبت به BC را به Q وصل می کنیم تا P_1 بدست آید. P_1 بین B و C است زیرا با فرض حاده بودن زاویه های مثلث، R' و Q' تصویرهای R و Q روی ضلع BC بین P_1 و Q' است. از نامساوی $PQ + RP < PQ + RP_1$ نتیجه می شود که محیط مثلث P_1RQ از محیط مثلث PRQ کوچکتر است و این خلاف فرض است. پس باید هر ضلع از مثلث ABC نیمساز خارجی زاویه نظیر از مثلث PQR باشد. نیمساز داخلی زاویه P از مثلث PQR از طرفی بر BC عمود است و از طرف دیگر باید با نیمسازهای خارجی دوزاویه R و Q متقارب باشد، یعنی از A بگذرد، پس نیمساز داخلی زاویه P ارتفاع رأس A از مثلث ABC است. چون این استدلال را درباره دوازده رأس دیگر Q و R تکرار کنیم، معلوم می شود که مثلث PQR که محیط آن می نیمم است مثلث ارتفاعی مثلث ABC و منحصر به فرد است.

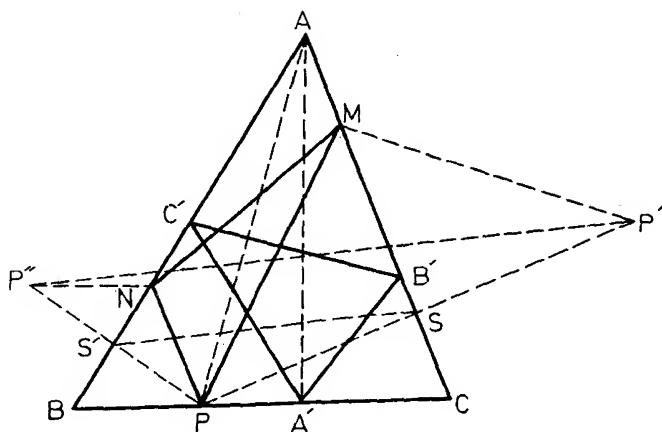
راه حل دوم - $A'B'C'$ مثلث ارتفاعی مثلث ABC را در نظر می گیریم و ثابت می کنیم محیط هر مثلث PMN محاط در مثلث ABC (با زاویه های حاده) از محیط مثلث $A'B'C'$ بزرگتر است. برای این کار P' و P'' قرینه های رأس P را نسبت به AC و AB تعیین کرده به هم وصل می کنیم و S و S' تصویرهای P بر AC و AB را نیز به هم وصل می کنیم، با توجه به شکل ملاحظه می شود که:

$$PM + MN + NP = P'M + MN + NP'' \geq P'P'' \quad (۱)$$

در مثلث ASS' بنا به قضیه سینوسها داریم $SS' = AP \sin A$ و چون

$$P'P'' = 2AP \sin A \quad (۲)$$

$$SS' = \frac{1}{2} P'P''$$



از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

$$PN + NM + MP \geq 2AP \sin A \quad (۳)$$

آنچه را درباره مثلث PNM عمل شد درباره مثلث ارتفاعی $A'B'C'$ انجام می‌دهیم، با توجه به اینکه قرینه‌های A' نسبت به AB و AC در راستای $B'C'$ واقع می‌شود نتیجه می‌گیریم

$$A'B' + B'C' + C'A' = 2AA' \sin A \quad (۴)$$

با توجه به اینکه $AA' < AP$ از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود

$$A'B' + B'C' + C'A' < PN + NM + MP$$

یعنی محیط مثلث $A'B'C'$ می‌نیم است.

۴. مسئله سه پیمانانه

یکی از موارد استعمال شگفت‌انگیز تقارن محوری، استفاده از آن در حل معماهایی است که موضوع آنها تقسیم مایع يك ظرف به قسمت‌های معین با استفاده فقط از دو پیمانانه معلوم است. اما چون در این کاربرد تقارن از مختصات مثلثی استفاده می‌شود، از اینرو لازم است که قبلاً این نوع مختصات معرفی شود.

نوعی کاغذ معروف به شطرنجی را خوب می‌شناسیم که همه‌جا در دسترس است. روی این نوع کاغذ دو دسته خط‌های متوازی عمود بر هم رسم شده و با ایجاد مربع‌های متساوی مجاور هم صفحه را خانه‌بندی کرده‌اند. از این نوع کاغذهای شطرنجی در مختصات دکارتی استفاده می‌کنند. می‌توانیم روی يك صفحه مثلثی متساوی الاضلاع، به اندازه کافی بزرگ، رسم کرده و در داخل آن سه دسته خط‌های متوازی و متساوی الفاصله به موازات ضلع‌های آن رسم کنیم. به این طریق صفحه مثلث را با ایجاد مثلث‌های متساوی الاضلاع مساوی و مجاور

با هم خانه بندی می کنیم . از این صفحه کاغذ که به این نوع ، خانه بندی شده است برای مختصات مثلثی (= مختصات سه خطی) ، به شرح زیر ، استفاده می کنیم :

اگر P نقطه ای از صفحه مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع a و به ارتفاع h باشد ، فاصله های نقطه P را از ضلعهای BC ، CA ، AB مختصات مثلثی P می نامیم و آنها را به ترتیب با x ، y ، z می نماییم و می نویسیم :

$$P(x, y, z)$$

با توجه به اینکه داریم :

$$\frac{1}{y}ax + \frac{1}{y}ay + \frac{1}{y}az = S(PBC) + S(PCA) + S(PAB)$$

$$= S(ABC) = \frac{1}{y}ah$$

از اینرو بدست می آید که :

$$x + y + z = h$$

هرگاه مجموع سه مقدار متغیر مقدار ثابت باشد ، استفاده از مختصات مثلثی کاملاً مناسب دارد . هرگاه یکی از آنها ثابت و مجموع دو متغیر دیگر نیز مقدار ثابت باشد ، نقطه (x, y, z) روی خطی موازی با یک ضلع مثلث تغییر مکان می دهد ، به ویژه در مختصات مثلثی ، ضلعهای مثلث مبدأ به معادله های زیر می باشند :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

و رأسهای مثلث به مختصات زیر می باشند :

$$A(h, 0, 0), \quad B(0, h, 0), \quad C(0, 0, h)$$

وقتی خواسته باشیم مقدار h لیتر از یک مایع را بین سه ظرف بخش کنیم به گونه ای که اولی شامل x لیتر ، دومی شامل y لیتر و سومی شامل z لیتر از آن باشد ، در موقعیتی هستیم که می توانیم آنچه را در بالا گفته شد در نظر داشته باشیم . چنانچه مایع درون ظرف اول را دست نزده اما مایع یکی از دو ظرف دیگر را در دیگری بریزیم ، در این صورت نقطه (x, y, z) دارای مکان به معادله : ثابت $x =$ می باشد . همچنین است هرگاه مایع ظرف اول را ثابت بداریم و از مایع ظرف دوم متوالیاً برداشته در ظرف سوم بریزیم . هرگاه هر یک از ظرفها ظرفیت h لیتر را داشته باشد هر یک از مختصات بین صفر و h می تواند تغییر کند . به این ترتیب مسئله عمومی $[h: h, h, h]$ را خواهیم داشت که حوزه تعریف جوابهای آن سطح مثلث ABC و با شرایط زیر می باشد :

$$0 \leq x \leq h, \quad 0 \leq y \leq h, \quad 0 \leq z \leq h$$

یکی از مسئله‌های کاملاً جالب عبارت است از : $[h : a, b, c]$ با شرط : $h > a > b > c$. در این حالت سه پیمانه a و b و c لیتری داده شده‌اند و h لیتر آزمایعی مفروض است و مقصود بدست آوردن مقدار معین d لیتر از آن مایع با استفاده فقط از سه پیمانه مزبور است ؛ هر چند مرتبه می‌توانیم مقداری از مایع داده شده یا کل آن را در آن سه ظرف جابجا کنیم. در این صورت متغیرها دارای حدهای زیر می‌باشند :

$$0 \leq x \leq a \text{ و } 0 \leq y \leq b \text{ و } 0 \leq z \leq c$$

و حوزه تعریف جوابها مساحت شش ضلعی ، منظم یا نامنظمی ، است که به شش خط زیر محدود است :

$$x=0, x=a \text{ و } y=0, y=b \text{ و } z=0, z=c$$

در حالت‌های ویژه ممکن است که این شش ضلعی به یکی از صورتهای زیر درآید : پنج ضلعی یا دوزنقه یا متوازی‌الاضلاع یا همانگونه که گفته شد تمام مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را دربرگیرد.

برای مثال این مسئله را در نظر می‌گیریم که ۸ لیتر مایع در اختیار داریم و با استفاده از سه پیمانه ۷ لیتری ، ۶ لیتری و ۳ لیتری می‌خواهیم ۴ لیتر از آن مایع را بدست آوریم. این مسئله به صورت $[۸:۷, ۶, ۳]$ نموده می‌شود و حدهای متغیرها چنین است :

$$0 \leq x \leq 7 \text{ و } 0 \leq y \leq 6 \text{ و } 0 \leq z \leq 3$$

حوزه تعریف جوابها شش ضلعی است محدود به خط‌های زیر :

$$x=7 \text{ و } z=0 \text{ و } y=6 \text{ و } x=0 \text{ و } z=3 \text{ و } y=0$$

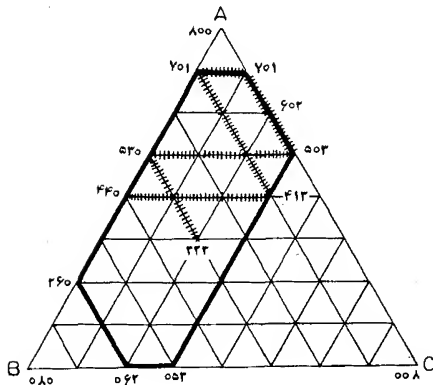
و رأسهای این شش ضلعی نقطه‌های با مختصات زیر می‌باشند :

$$(7, 0, 0) \text{ و } (5, 0, 3) \text{ و } (0, 5, 3) \text{ و } (0, 6, 2) \text{ و } (2, 6, 0) \text{ و } (7, 1, 0)$$

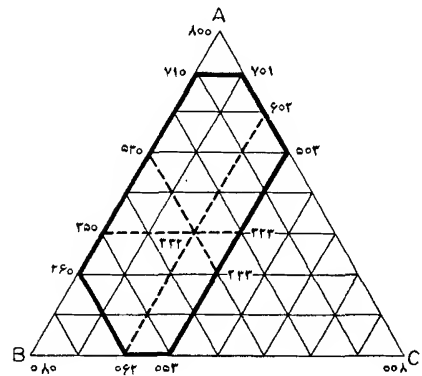
که برای اختصار آنها را به صورتهای زیر می‌نویسیم :

$$710, 260, 062, 053, 503, 701$$

در شکل‌های زیر دو حالت از این مسئله نموده شده است. در شکل (۶.۴ ، الف) که نقطه ۳۳۲ نموده شده مبین آن است که در ظرف اول ۳ لیتر ، در ظرف دوم ۳ لیتر و در ظرف سوم ۲ لیتر مایع وجود دارد. شش پاره خط واصل به این نقطه که نقطه چین رسم شده‌اند شش حالت ممکن جابجا کردن مایع را درون ظرفها برای رسیدن به آن وضع نشان می‌دهد. عبور از نقطه ۳۳۲ به نقطه ۵۳۰ به این معنی است که ظرف سوم را خالی کرده (۰ به جای ۲) و محتوی آن را در ظرف اول می‌ریزیم (۵ به جای ۳) ؛ در حالی که مسیر از ۳۳۲ به ۲۳۳ نشان می‌دهد که ظرف سوم را از محتوای ظرف اول پر کرده‌ایم. همچنین مسیر از ۲۳۳ به ۰۶۲ به این معنی است که محتوای ظرف سوم را در ظرف دوم سپس محتوای ظرف اول را در ظرف سوم می‌ریزیم. در شکل (۶.۴ ، ب) خط شکسته‌ای



(شکل ۶.۴ ، ب)



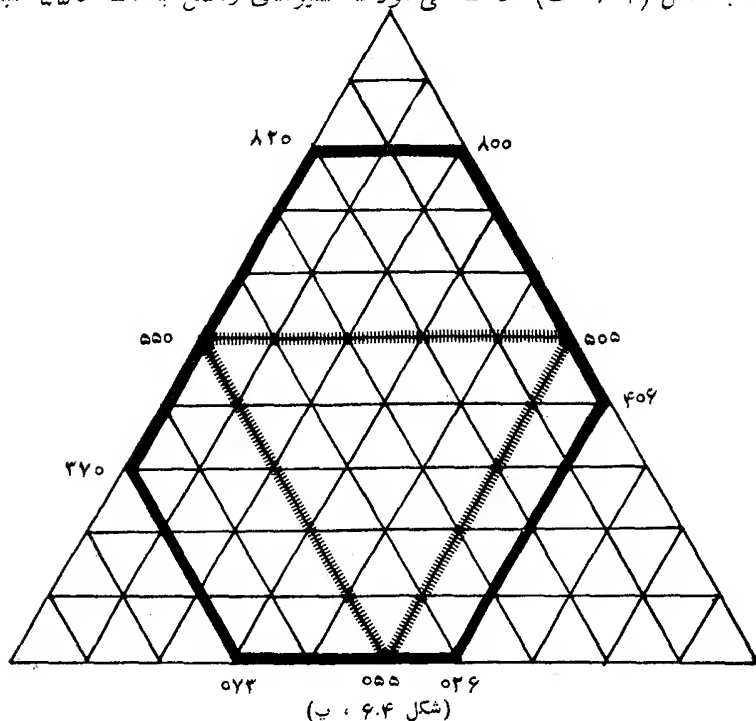
(شکل ۶.۴ ، الف)

که با خطهای پرداز نموده شده و ۳۳۲ را به ۴۴۰ وصل کرده یکی از راههای متعدد و ممکن بین این دو نقطه را نشان می‌دهد، به عبارت دیگر راههای مختلف تقسیم ۸ لیتر را به دو بخش برابر می‌نمایاند. این مسیر خط شکسته در هر حال با یکی از ضلعهای مثلث مبدأ موازی است و فقط وقتی تغییر جهت می‌دهد که با محیط شش ضلعی حوزه تعریف جوابها برخورد کند. هر گاه طبق قاعده مزبور مسیرهای دیگر را در نظر بگیریم به نقطه‌های با مختصات صحیح واقع بر مرز شش ضلعی می‌رسیم. از اینرو در مسئله [۸:۷.۶، ۳] از راه جابجا کردن مایع درون ظرفها می‌توانیم هر مقدار صحیح به حسب لیتر کمتر از ۸ لیتر را از مایع داده شده بدست آوریم.

شکل (۶.۴، ب) نظیر مسئله [۱۵:۸، ۷، ۶] رسم شده است. در این مسئله با استفاده از سه پیمانه ۸ لیتری، ۷ لیتری و ۶ لیتری می‌خواهیم بخشی معین از مقدار ۱۵ لیتر مایع مفروض را بدست آوریم. در این مسئله بدست آوردن ۱ لیتر، ۲ لیتر، ۳ لیتر و ۴ لیتر به آسانی انجام می‌گیرد. اما، مگر در حالتی که در ابتدا یکی از ظرفها شامل ۵ لیتر باشد، بدست آوردن ۵ لیتر غیر ممکن است. زیرا سه نقطه ۵۵۵، ۵۵۵، ۵۵۵ مسیر بسته‌ای به شکل مثلث متساوی الاضلاع تشکیل می‌دهند و طبق قاعده مربوط از هیچ مسیر دیگری نمی‌توان به این مسیر راه یافت. این چنین وضعیتی در حالت کلی برای مسئله [h : a, b, c] وقتی بیش می‌آید که داشته باشیم:

$$h = 2d \geq a > b > c > d$$

مسئله [۱۰:۸،۶،۴] نیز دارای وضعیتی ویژه اما کمی متفاوت از مسئله قبل می باشد. با توجه به شکل (۶.۴، ت) ملاحظه می شود که مسیرهای واصل به نقطه ۵۵۰ شبکه ای

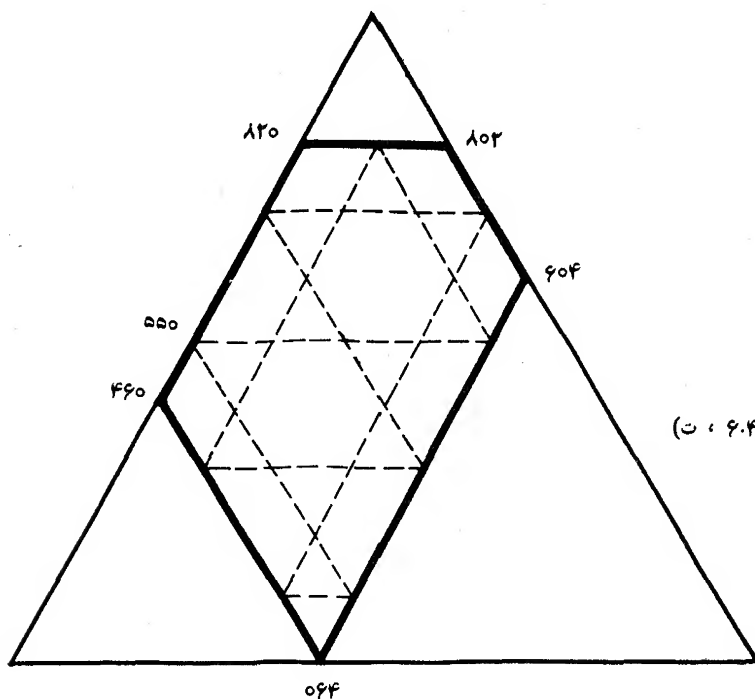


بسته متشکل از مثلثهای متساوی الاضلاع و چند ضلعیهای منظم تشکیل می دهد. در این حالت ظرفیت هر يك از پیماندهای مفروض عدد زوج است در حالی که مقدار مایعی که می خواهیم بدست آوریم عدد فرد است. این چنین مسئله هایی نیز جواب ندارند. يك چنین اشکالی در هر مسئله $[h : a, b, c]$ که در آن سه عدد a, b, c دارای مقسوم علیه مشترك بزرگتر از يك می باشند وجود دارد.

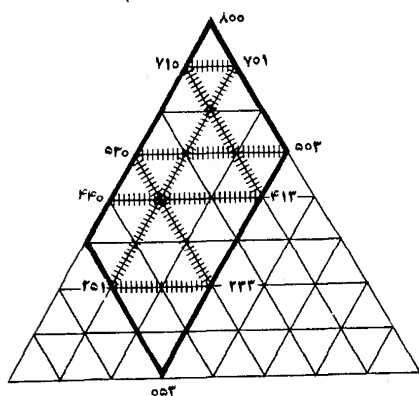
مشهورترین مسئله های $[h : a, b, c]$ به مشخصات زیر می باشند:

$$h = a = 2d = b + c$$

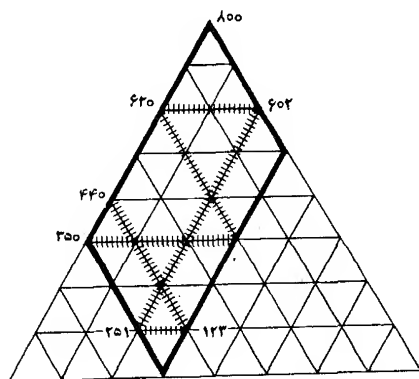
در این مسئله ها حوزه جوابها به شکل متوازی الاضلاعی است که cbo, aoo رأسهای آن می باشند. مسئله $[8 : 8, 5, 3]$ يك مثال عددی از این نوع مسئله ها است. راه حل هفت مرحله ای این مسئله در شکل (۶.۴، ث) و راه حل هشت مرحله ای آن در شکل (۶.۴، ج) نموده شده است. این مسئله معمولاً چنین بیان می شود: دو مرد يك ظرف شامل ۸ لیتر مایع و دو پیمانه ۵ لیتری و ۳ لیتری در اختیار دارند. آنان چگونه می توانند



آن مایع را به تساوی بین خود بخش کنند؟ اولین مرحله عمل پر کردن پیمانه‌های ۵ لیتری و ۳ لیتری است (شکلهای ۶.۴، ت و ۶.۴، ج). به این ترتیب نقطه ۳۵۰ یا ۵۰۳ بدست می‌آید. از این نقطه مسیری را تعقیب می‌کنیم که با ضلع مثلث مبدأ موازی است و هرگاه



(شکل ۶.۴، ج)



(شکل ۶.۴، ث)

که به ضلع متوازی الاضلاع حوزه جوابها برخورد می کند ، به همان ترتیب که نور در برخورد با آینه منعکس می شود ، تغییر جهت می دهد. هر ضلع این مسیر به شکل خط شکسته نشان می دهد که جایجائی مایع درون پیمانه ها چگونه انجام می شود. به این ترتیب یک راه حل مسئله شامل هفت مرحله زیر بدست می آید:

$$۸۰۰،۳۵۰،۳۲۳،۶۲۰،۶۰۲،۱۵۲،۱۴۳،۴۴۰$$

یک راه حل دیگر شامل هشت مرحله به صورت زیر بدست می آید:

$$۸۰۰،۵۰۳،۵۳۰،۲۳۳،۲۵۱،۷۰۱،۷۱۰،۴۱۳،۴۴۰$$

باید توجه داشت که یک چنین مسئله (به فرض $a=b+c$) وقتی قابل حل است که دو عدد طبیعی b و c نسبت به هم اول باشند ، یعنی مقسوم علیه مشترک غیر از یک نداشته باشند.

تمرینها

- ۱- ظرفی شامل ۱۲ لیتر مایع در اختیار است. با دو پیمانه ۹ لیتری و ۵ لیتری چگونه می توان آن مایع را به دو بخش مساوی تقسیم کرد؟
- ۲- سه نفر دزد ظرفی محتوی ۲۴ لیتر روغن را می ربایند. اولی پیمانه ای ۱۳ لیتری، دومی پیمانه ای ۱۱ لیتری و سومی پیمانه ای ۵ لیتری در اختیار دارد. آنان با استفاده از این پیمانه ها چگونه می توانند روغن دزدیده شده را به تساوی بین خود تقسیم کنند؟
- ۳- نسبت به مثلث ABC دو نقطه P و P' به ترتیب دارای مختصات مثلثی (x, y, z) و (x', y', z') می باشند. هر گاه داشته باشیم:

$$xx' = yy' = zz'$$

می گوئیم که دو نقطه P و P' مزدوج هم ذایبه ای یکدیگرند. ثابت کنید که دو این حالت داریم:

$$\widehat{P'AC} = \widehat{BAP} \text{ و } \widehat{P'BA} = \widehat{CBP} \text{ و } \widehat{P'CB} = \widehat{ACP}$$

۷.۴- تجانس

تبدیلیهایی که گفته شد همه دارای این ویژگی بودند که شکل مفروض را به شکل مساوی با آن تبدیل می کردند. و همه آنها که ویژگی حفظ فواصل را داشته باشند «هم اندازگی (= ایزومتري)» نامیده می شوند.

اکنون به منظور بهره وری تبدیلی را در نظر می گیریم که به هر شکل، شکلی متشابه با آن را نظیر می سازد. در چنین تبدیل موسوم به تشابه اندازه های زاویه ها ثابت می ماند، اما فاصله ها عموماً تغییر می کنند و به نسبت معینی بزرگ یا کوچک می شوند که این نسبت را

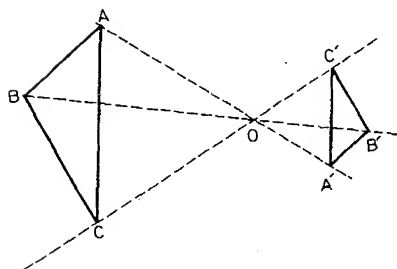
نسبت تشابه می‌نامیم. در تشابه، هر پاره خط AB به پاره خط $A'B'$ تبدیل می‌گردد که طول آن برابر است با:

$$A'B' = k \cdot AB$$

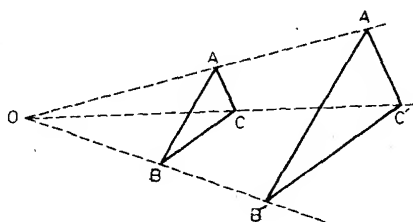
نسبت k می‌تواند بزرگتر از یک، مساوی با یک، یا کوچکتر از یک باشد. در حالت $k=1$ ، تشابه همان هم‌اندازگی است. ای تصریح بیشتر نکته‌های بالایی توان گفت که تشابه تبدیلی است که نسبت بین فاصله‌ها را ثابت نگاه می‌دارد؛ زیرا این تعریف ایجاب می‌کند که زاویه‌ها، همچنین استقامت نقاط واقع بر خطوط محفوظ بمانند.

تجانس ساده‌ترین نوع تشابه است که هر خط را به خط موازی با خودش تبدیل می‌کند. تجانس در حالت خاص ممکن است که به صورت یک انتقال ساده باشد؛ در غیر این صورت آن را تجانس مرکزی می‌نامند؛ زیرا هر خط واصل بین دو نقطه متناظر بر نقطه ثابت به نام مرکز تجانس می‌گذرد. برای اثبات این موضوع، هرگاه در یک تجانس به نسبت $\pm k$ (به فرض $k > 0$)، پاره خط $A'B'$ مبدل پاره خط AB باشد، مطابق باشکلهای (الف، ۷.۴) و (ب، ۷.۴)، این دو پاره خط با هم موازیند و داریم:

$$\overrightarrow{A'B'} = \pm k \cdot \overrightarrow{AB}$$



(شکل ۷.۴، الف)



(شکل ۷.۴، ب)

هر نقطه C از شکل مفروض که با A و B مثلثی بسازد، دارای مبدل C' است به گونه‌ای که $A'C'$ با AC و $B'C'$ با BC موازی است. در حالتی که تجانس به صورت انتقال نباشد (یعنی داشته باشیم $k \neq 1$) دو خط AA' و BB' در یک نقطه O برخورد می‌کنند به گونه‌ای که:

$$\overrightarrow{OA'} = \pm k \cdot \overrightarrow{OA} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OB'} = \pm k \cdot \overrightarrow{OB}$$

بنا به قضیه تالس که خطهای متوازی روی هر دو خط متقاطع پاره خطهای نظیر به نظیر متناسب بوجود می آورند ، نتیجه می شود که:

$$\overrightarrow{OC'} = \pm k \cdot \overrightarrow{OC}$$

و بنا بر این C' بر امتداد OC واقع است.

در شکل (۷.۴ ، الف) هر گاه نقطه O به سمت چپ حرکت کند و به فاصله بینهایت واقع شود ، درحد ، خطهای AA' و BB' و CC' باهم موازی می شوند که در این صورت k به سمت ۱ میل می کند و خواهیم داشت: $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ پس در این حالت ، تجانس به صورت انتقال درآمده است.

در شکل (۷.۴ ، ب) هر گاه O وسط AA' واقع شود خواهیم داشت: $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ که در این صورت تجانس به صورت تبدیل نیم دور، به عبارت دیگر به صورت تقارن مرکزی ، درمی آید.

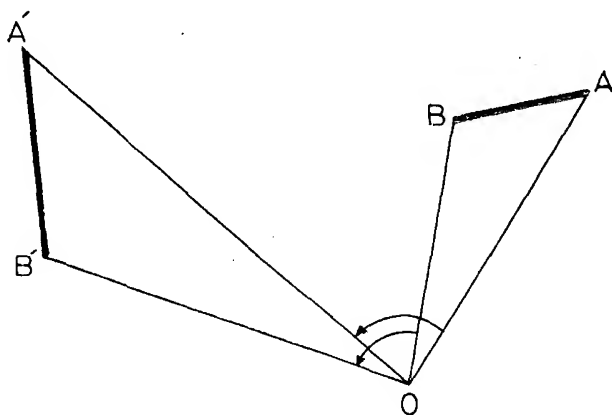
تمرینها

- ۱- مکان هندسی وسط پاره خط متغیری را تعیین کنید که يك سر آن ثابت است و سردیگر آن روی دایره ثابت حرکت می کند.
- ۲- مثلث ABC با زاویدهای حاده داده شده است. مربعی چنان رسم کنید که يك ضلعش روی BC و دو رأس دیگرش بر AB و AC واقع باشند.

۸.۴- تبدیل تشابهی

هر گاه شکلی نخست به وسیله تجانس و آنگاه به وسیله انتقال تبدیل شود، خطهای نظیر موازی باهم باقی می مانند و در نتیجه شکل حاصل مجانسی از شکل اول است. همچنین و بنا به همان دلیل ، ترکیب دو تجانس باز يك تجانس است. اما اگر شکلی نخست بوسیله تجانس و آنگاه به وسیله دوران تبدیل شود ، خطهای نظیر معمولاً موازی باهم نخواهند بود. بنابراین ترکیب يك تجانس با يك دوران (که این دوران تمام دور و یا نیم دور نباشد) يك تجانس نخواهد بود ، بلکه يك تشابه مستقیم می باشد که علاوه بر اندازه های زاویه ها جهت های آنها را نیز ثابت نگاه می دارد.

در حالت کلی ، ترکیب يك تجانس و يك دوران که مرکزهای مشترك داشته باشند تبدیل تشابهی نامیده می شود. این تبدیل راه حل بسیاری از مسئله ها را آسان خواهد کرد. مطابق شکل (۸.۴ ، الف) ، در يك چنین تبدیل تشابهی پاره خط AB به پاره-



(شکل ۸.۴ ، الف)

خط $A'B'$ بدل شده است. دو مثلث OAB و $O'A'B'$ مستقیماً متشابهند و داریم:

$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$$

و به علاوه همانگونه که در مورد تجانس در حالت کلی وجود دارد، داریم:

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB}$$

هر تبدیل تشابهی با مرکز O ، نسبتش k و زاویه دوران θ کاملاً مشخص می شود و آن را چنین نشان می دهیم:

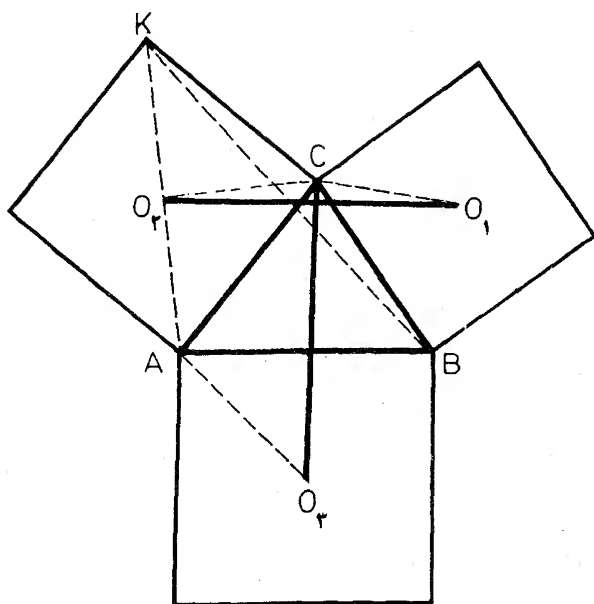
$$O(k, \theta)$$

(همانگونه که می دانیم زاویه دوران جهت دار است که اگر جهت آن در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باشد اندازه آن مثبت است و در جهت خلاف آن اندازه اش منفی می باشد). شکل (۷.۴، الف) تبدیل تشابهی $O(k, 0^\circ)$ و شکل (۷.۴، ب) تبدیل تشابهی $O(k, 180^\circ)$ می باشد. یک دوران به زاویه θ تبدیل تشابهی $O(1, \theta)$ می باشد.

برای آنکه چگونگی کاربرد تبدیل تشابهی را نشان بدهیم، قضیه های زیر و اثبات آنها را ارائه می دهیم:

قضیه ۸.۴-۱- هرگاه، دوی ضلعهای AB و CA ، BC از مثلث ABC و در خارج آن، مربعاتی به مرکزهای O_1 و O_2 و O_3 بسازیم، خطهای CO_1 و CO_2 باهم برابر و برهم عمودند.

با توجه به شکل (۸.۴، ب) ملاحظه می کنیم که در تبدیل تشابهی $A(\sqrt{2}, 45^\circ)$ مثلث KAB مبدل مثلث CAO_3 است، همچنین در تبدیل تشابهی $C(\sqrt{2}, -45^\circ)$



(شکل ۸.۴ ، ب)

مثلث BCK مبدل مثلث O_1CO_2 است. در دو تبدیل مزبور دوپاره خط O_1CO_2 با نسبت $\sqrt{2}$ بديك پاره خط BK بدل شده‌اند. بنابراین دوپاره خط مزبور با هم برابرند. به علاوه، در تبدیل دوپاره خط مزبور به BK، یکی از آنها به زاویه 45° و دیگری به زاویه 45° — دوران کرده‌اند، پس زاویه بین آن دوپاره خط برابر با مجموع قدرمطلقای زاویه‌های دوران یعنی برابر با 90° است، یعنی آن دوپاره خط بر هم عمودند. (به طریق مشابه ثابت می‌شود که O_1O_2 و AO_1 و همچنین O_2O_1 و BO_2 نیز با هم برابر و بر هم عمودند و نتیجه خواهد شد خطهای O_1A ، O_2B و O_3C که ارتفاعهای مثلث $O_1O_2O_3$ می‌باشند متقارنند).

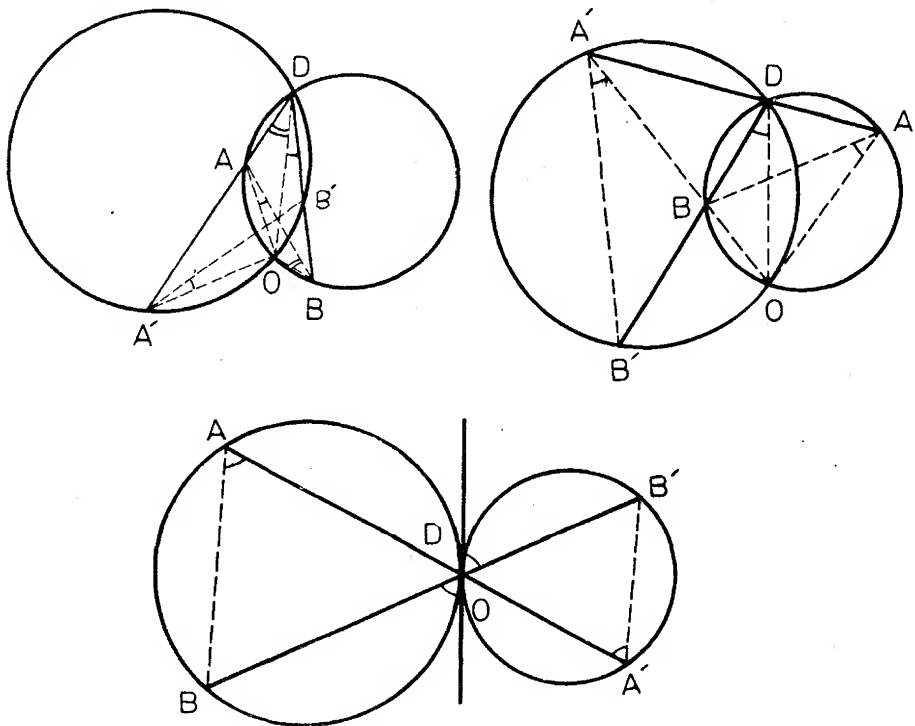
اکنون که تبدیل تشابهی را به عنوان حاصل ترکیب يك تجانس و يك دوران با مرکزهای مشترك تعريف کردیم، این پرسش برای ما پیش می‌آید که حاصل ترکیب يك تجانس و يك دوران با مرکزهای مختلف چه می‌باشد. پاسخ ساده و درعین حال شگفت‌آور است: حاصل ترکیب این دو تبدیل باز هم يك تبدیل تشابهی است، زیرا تبدیلهای تشابهی مستقیم از نوع بسیار پیچیده وجود ندارد.

قضیه ۲۰۸.۴- هر دو شکل دلخواه متشابه، یا در يك انتقال و یا در يك تبدیل تشابهی، مبدل یکدیگرند.

برای اثبات، فرض می‌کنیم که در دو شکل مفروض مستقیماً متشابه، دوپاره خط

AB و $A'B'$ نظیر یکدیگر باشند. اگر $A'B'$ با AB مساوی و موازی باشد. در این صورت تبدیل انجام یافته يك انتقال است. از شکل اول نقطه C را غير واقع بر AB در نظر می گیریم و فرض می کنیم C' نقطه نظیر آن باشد. چون دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مستقیماً متشابهند و $A'B'$ با AB مساوی و موازی است پس دو مثلث مزبور باهم برابرند و ضلعهای نظیر آنها باهم موازیند. چون نقطه C را به دلخواه می توانیم انتخاب کنیم پس هر دوباره خط متناظر از دو شکل مفروض مساوی و موازیند و بنابراین دو شکل مفروض در يك انتقال مبدل یکدیگرند.

فرض می کنیم که AB و $A'B'$ با یکدیگر مساوی و موازی نباشند، در این صورت AA' با BB' در يك نقطه D برخورد می کنند. (اگر چهار نقطه A, B, A', B' يك چهار گوشه تشکیل ندهند، مثلاً A' در امتداد AB واقع باشد، می توانیم وسط AB را به جای A و وسط $A'B'$ را به جای A' انتخاب کنیم). مطابق با شکل (۸.۴، ب) دایره های محیطی دو مثلث ABD و $A'B'D$ را رسم می کنیم. این دو دایره که در D مشترکند در نقطه دیگر O نیز مشترکند (که ممکن است O بر D منطبق باشد). از تساوی دو زاویه OAB و ODB و همچنین دو زاویه $OA'B'$ و ODB'



(شکل ۸.۴، ب)

تساوی دوزاویه OAB و $OA'B'$ نتیجه می‌شود. همچنین تساوی دوزاویه OBA و $OB'A'$ بدست می‌آید. بنابراین دو مثلث OAB و $OA'B'$ که مستقیماً متشابهند در تبدیل تشابهی زیرمتناظرند:

$$O(k, \theta) ; k = \frac{OA'}{OA} \text{ و } \theta = \widehat{AOA'}$$

هر تبدیل تشابهی مستقیم که انتقال نباشد دارای نقطه ثابتی است که این نقطه منحصر به فرد است. زیرا اگر برای تبدیل تشابهی دو نقطه ثابت A و B وجود داشته باشد، پاره خط AB نیز ثابت است و باید داشته باشیم:

$$k = \frac{AB}{AB} = 1$$

و در این صورت تبدیل مزبور يك هم‌اندازگی خواهد بود و چنانچه در این تبدیل دو مثلث ABC و ABC' نظیر هم باشند نقطه C' در عین حال بدایره‌های به مرکزهای A و B و به شعاعهای AC و BC تعلق خواهد داشت. بنابراین، تبدیل مزبور یا يك همانی (یعنی انتقال به بردار صفر) خواهد بود و یا يك تقارن محوری (که در این صورت تشابه نظیر آن غیر مستقیم است زیرا در آن جهت زاویه‌ها تغییر می‌کند).

علاوه می‌توانیم وجود يك مرکز تشابه منحصر به فرد را برای دو شکل متشابه آزمایش کنیم؛ هرگاه يك شکل را با دو مقیاس روی کاغذهای كالك رسم کنیم و آنها را روی هم قرار بدهیم و یکی را بلغزانیم تا دقیقاً در کنار دیگری واقع شود ملاحظه خواهیم کرد که باید يك نقطه را ثابت نگاه داریم.

این ملاحظات توسط جولیس پترسن^۱ (۱۸۸۵) و پ. ه. اسکوت^۲ (۱۸۹۵) از راه بیان و اثبات قضیه‌ای بسیار قشنگ توسعه یافتند، يك حالت خاص این قضیه از این قرار است:

قضیه ۳-۸-۴- هرگاه دو مثلث مستقیماً متشابه ABC و $A'B'C'$ مفروض باشد و مثلثهای $AA'A''$ ، $BB'B''$ و $CC'C''$ نیز مستقیماً متشابه باشند، در این صورت دو مثلث ABC و $A''B''C''$ نیز مستقیماً متشابهند.

هرگاه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با هم برابر باشند حکم واضح است. در حالت کلی که آنها با هم برابر نباشند، شکل (۳-۸-۴)، فرض می‌کنیم $O(k, \theta)$ تبدیل تشابهی باشد که آنها را به هم بدل می‌کند به گونه‌ای که داریم:

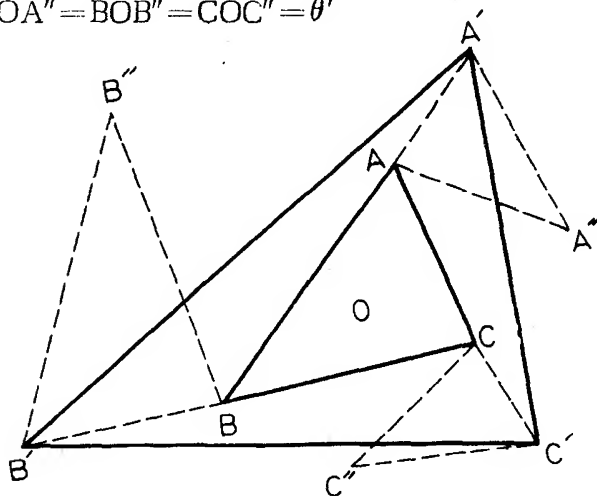
$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}$$

$$\theta = \widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'}$$

نتیجه می شود که مثلثهای OAA' ، OBB' و OCC' با هم متشابهند و با توجه به فرض نتیجه می شود که مثلثهای OAA'' ، OBB'' ، OCC'' نیز با هم متشابهند. پس داریم:

$$\frac{OA''}{OA} = \frac{OB''}{OB} = \frac{OC''}{OC} = k'$$

$$\widehat{AOA''} = \widehat{BOB''} = \widehat{COC''} = \theta'$$



(شکل ۸.۴، ت)

بنابراین در تبدیل تشابهی $O(k', \theta')$ دو مثلث ABC و $A''B''C''$ نظیر یکدیگرند، یعنی با هم متشابهند.

قضیه زیر حالات خاص دیگری از قضیه پتوسن - اسکوت است که با روش مشابه ثابت می شود:

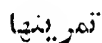
قضیه ۸.۴ - ۴ - در یک تبدیل تشابهی که پاره خطهای AB و $A'B'$ نظیر یکدیگرند، هرگاه P نقطه ای از AB و P' نقطه نظیرش از $A'B'$ باشد، نقطه هایی که PP' را به نسبت معین تقسیم می کنند یا متمایزند و بر یک خط راست واقعند یا اینکه همه برهم منطبقند.

تغییر (تغییر)

- ۱- مثلث ABC و تبدیل تشابهی به مرکز ثابت A و به نسبت متغیر k را در نظر می گیریم. هر گاه در این تبدیل، مبدل رأس B بر BC حرکت کند ثابت کنید که مبدل رأس C نیز بر یک خط ثابت حرکت خواهد کرد.
- ۲- دربند ۳۰۳ بدون اثبات بیان شده است که مثلث ناپلئون داخلی هر مثلث مختلف الاضلاع ABC با آن در جهت معکوس است (یعنی جهت توالی رأسهای آنها در خلاف یکدیگر است). این حکم را ثابت کنید.

۹.۴- تبدیلهای متوالی

در پیش گفتیم که هر تبدیل عبارت است از تناظر یک به یک بین نقاط متعلق به یک صفحه با خود آنها. تا کنون چند تبدیل را شرح داده ایم که همه آنها تبدیل پیوسته بوده است. یعنی تبدیلهایی بوده اند که نقطه های مجاور را به نقطه های باز هم مجاور بدل می کرده اند. از بین این تبدیلهای پیوسته از آنهایی که صحبت کرده ایم خطی بوده اند، یعنی خطوط را محفوظ می داشته اند، به عبارت دیگر خط را به خط تبدیل می کرده اند. همچنین از تبدیلهایی بحث شد که توانی خطوط را محفوظ می داشتند یا اینکه نسبت بین فواصل را ثابت نگاه می داشتند. در این میان تبدیلهایی با ویژگیهای شگفت را به کنار گذارده ایم که از آن جمله می توان از تغییر شکل پروکوست^۱ نام برد (که دایره را به بیضی با همان مساحت بدل می کند). از تبدیلهای تشابهی بحث شد که یا هم اندازگی بود که اندازه ها را محفوظ می داشت، و یا تجانس بود که خط را به خط موازی با خودش بدل می کرد، و یا اینکه شامل نقطه ثابت و دوران در جهت معین بود. وانگهی، این ویژگیها گاهی درهم آمیخته اند: بین هم اندازگیها، تقارن محوری و انتقال (که خود حالت خاص تجانس است) و دوران (که تبدیل تشابهی با نسبت یک می باشد) را بررسی کردیم. همچنین ملاحظه کردیم که تجانس نوعی تبدیل تشابهی با زاویه صفر است. بالاخره از نیم دور یا تقارن مرکزی بحث شد که دوران به زاویه ۱۸۰° و یا اینکه تجانس به نسبت -۱ — می باشد. روابط بین این تبدیلهای را می توانیم به صورت نمودار درختی مانند صفحه بعد نشان دهیم.



۱- انتقالی که (۵۰۰) را به (a و b) بدل می‌کند.

- ۲- تقارن نسبت به محور y ها.
- ۳- تقارن نسبت به خط به معادله $x - y = 0$
- ۴- تقارن نسبت به مبدأ مختصات.
- ۵- تجانس $O(k و 0)$.
- ۶- تبدیل تشابهی $O(k و 90^\circ)$
- ۷- يك هم اندازگی كه تاكنون ذكر نشده است.
- ۸- يك تبدیل تشابهی كه تاكنون از آن بحث نشده است.
- ۹- تبدیلی پیوسته و غیر خطی.
- ۱۰- تبدیلی ناپیوسته.

آشنایی با هندسه انعکاسی

قفسی گوی گون را در بیشه بگذاریم؛ به درون آن برویم و درس را ببندیم. سپس انعکاسی نسبت به قفس را انجام دهیم. آنگاه شیر در درون قفس خواهد بود و ما در بیرون آن.

ه. پتارد (H. Petard)

در این بخش، تا حد امکان، دیگر به تبدیلهای يك به یکی که همه نقطه‌های صفحه اقلیدسی را در بر می گیرند قناعت نخواهیم کرد؛ با تبدیلی سروکار داریم که در آن يك نقطه O دارای مبدل نیست. به عبارت واضحتر، دایره ای ثابت به مرکز O به نام دایره انعکاس در نظر می گیریم: در آن صورت بنا به تعریفی که می کنیم هر دایره که بر O بگذرد به يك خط تبدیل می شود در حالی که هر دایره دیگر باز هم به دایره تبدیل خواهد شد. (در بسیاری از موارد، از راه تبدیل دایره ها به خطهای راست می توان مسئله ها را ساده کرد؛ که در این صورت شکلهای بفرنج بد ریخت کاملاً جدید در خواهند آمد).

۱.۵- جفتهای نقطه‌های جداساز

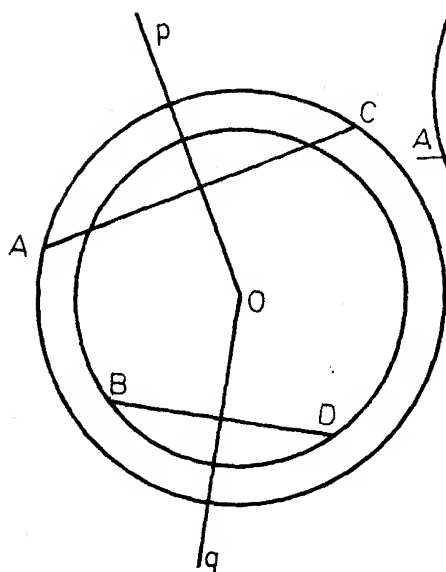
قضیه زیر در ۱۹۶۵ در مسابقه‌های ویلیام لاوِل پاتنیم مطرح شده است. اما تصدیق خواهید کرد که طرح آن در چنین مسابقه ای به علت مشکل بودن اثبات آن مناسبتی نداشته است. اثباتی که در زیر ارائه می شود با استفاده از راه حل های گونا گونی که برای آن انجام گرفته بدست آمده است.

1- William Lowell Putnam.

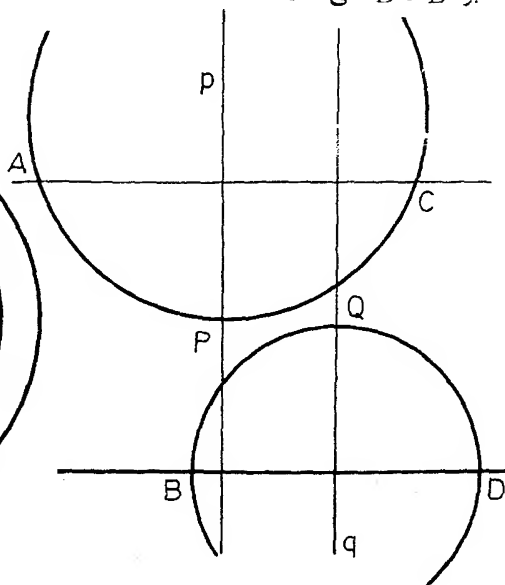
مسابقه‌هایی است که هر سال در ایالات متحده آمریکا برگزار می شود.

قضیه ۱۰۵- هرگاه چهار نقطه A, B, C, D نه بزرگ خط و نه بزرگ دایره واقع باشند، دو دایره بدون نقطه مشترک وجود خواهد داشت که یکی از آنها بر A و C و دیگری بر B و D بگذرد.

برای اثبات، عمود منصف پاره خط AC را با P و عمود منصف پاره خط BD را با q نشان می دهیم. p و q نمی توانند بر هم منطبق باشند، بنابراین یا در یک نقطه O متقاطعند و یا با هم موازیند. اگر p و q در O متقاطع باشند، مطابق باشک (۱۰۵، الف)، دایره های بمرکز O و به شعاعهای OA و OB متداخلند و اولی بر A و C و دومی بر B و D می گذرد.



(شکل ۱۰۵، الف)



(شکل ۱۰۵، ب)

اگر p با q موازی باشد، در این صورت AC نیز با BD موازی است. مطابق با شکل (۱۰۵، ب)، نقطه های P و Q به ترتیب بر p و q و به یک فاصله از خطهای موازی AC و BD وجود دارند. دایره ای که بر A, C, P می گذرد با دایره ای که بر B, D, Q می گذرد نقطه مشترک نخواهد داشت.

جفت نقاط A, C را نسبت به جفت نقاط B, D جدا سازا می نامیم هرگاه چهار نقطه A, B, C, D یا بزرگ خط و یا بزرگ دایره واقع باشند و پاره خط یا کمان AC یکی و فقط یکی از دو نقطه B و D را در برداشته باشد، به عبارت ساده تر هر یک از

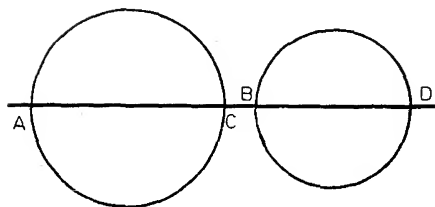
جفتها بین نقطه‌های جفت دیگر جدایی بیندازد. رابطه مزبور را بنا به قرارداد به صورت متداول زیر نشان می‌دهیم:

$$AC \parallel\parallel BD$$

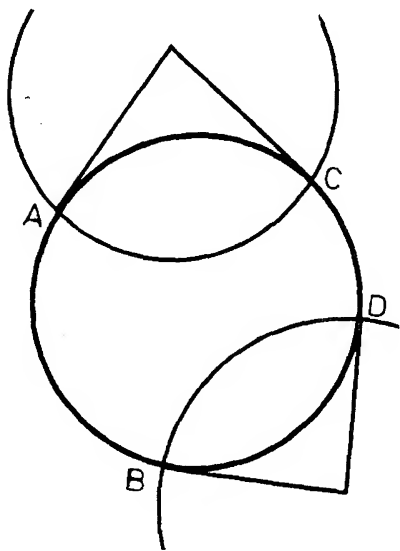
این رابطه را به هفت صورت دیگر می‌توان نوشت. مانند:

$$AC \parallel\parallel DB \text{ یا } BD \parallel\parallel AC$$

هرگاه چهار نقطه A, B, C, D بر یک خط یا بر یک دایره واقع باشند اما جفت نقاط A, C نسبت به جفت نقاط B, D جدا ساز نباشد، به سادگی می‌توان دو دایره بدون نقطه مشترک رسم کرد که یکی بر A و C و دیگری بر B و D بگذرد؛ درحالی که این چهار نقطه بر یک خط واقع باشند، مانند شکل (۱۰۵، پ)، کافی است دایره‌های به قطرهای AC و BD را رسم کنیم؛ هرگاه چهار نقطه A, B, C, D به شرط مذکور بر یک دایره واقع باشند، مانند شکل (۱۰۵، ت)، مماسهایی که در A و C بر دایره رسم کنیم و همچنین مماسهایی که در B و D بر آن رسم کنیم مرکزهای دایره‌هایی متمايز را بدست می‌دهند.



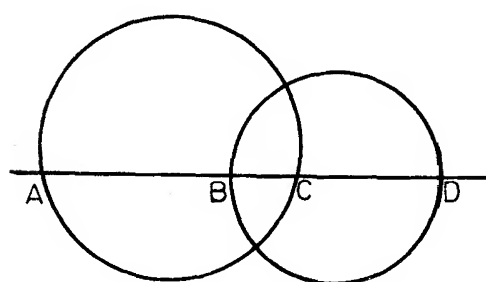
(شکل ۱۰۵، پ)



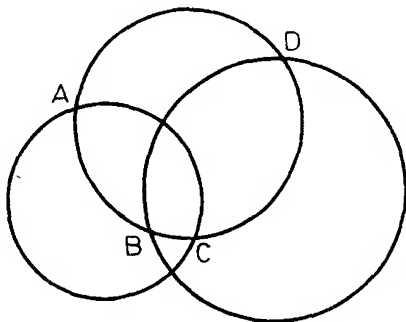
(شکل ۱۰۵، ت)

هرگاه داشته باشیم $AC \parallel\parallel BD$ ، در این صورت هر دایره که بر A و C بگذرد، از دو نقطه B و D یکی در درون آن و دیگری در بیرون آن واقع خواهد شد؛ بنابراین هر دایره که بر A و C بگذرد با هر دایره که بر B و D بگذرد متقاطع خواهد بود. صورت نقیض قضیه (۱۰۵) بدین معنی است که هرگاه دایره‌ای دلخواه که بر دو

نقطه مفروض می‌گذرد با دایره دلخواه دیگر که بر دو نقطه مفروض دیگر می‌گذرد حداقل در دو نقطه مشترک باشد، آن چهار نقطه مفروض باید یا بر یک خط و یا بر یک دایره واقع باشند، شکل‌های (۱۰۵، ث) و (۱۰۵، ج). در چنین حالتی، دوجفت نقطه‌های مفروض



(شکل ۱۰۵، ث)



(شکل ۱۰۵، ج)

هر کدام نسبت به دیگری جدا سازی باشد. با توجه به آنچه گفته شد می‌توانیم بدون قید آنکه چهار نقطه بر یک خط یا بر یک دایره واقع باشند، تعریف مفهوم جدا سازی را به شرح زیر بیان کنیم:

دوجفت نقطه‌های (A, C) و (B, D) را نسبت به یکدیگر جدا سازی می‌گوییم هرگاه هر دایره گذرنده بر A و C با هر دایره گذرنده بر B و D حداقل در دو نقطه مشترک باشد؛ کداین دو دایره یا متقاطعند و یا منطبقند.

نا گفته نماند که به نوع دیگری و بدون ارتباط دادن هیچ دایره‌ای نیز می‌توان جدا سازی را مشخص کرد.

قضیه ۴-۱۰۵- بین فاصله‌های هر چهار نقطه A, B, C, D از یکدیگر رابطه زیر برقرار است:

$$AB \times CD + BC \times AD \geq AC \times BD$$

تساوی وقتی برقرار است که $|AC| \parallel |BD|$ باشد.

اثبات این قضیه هر چند که نیاز به یادآوری‌هایی دارد اما حائز اهمیت است. نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که چهار نقطه بر یک خط واقع باشند. در این صورت با استفاده از ویژگی‌های برداری (بند ۱۰۲) فرض می‌کنیم که:

$$\overrightarrow{AD} = x, \quad \overrightarrow{BD} = y, \quad \overrightarrow{CD} = z$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\vec{AB} = x - y, \quad \vec{BC} = y - z, \quad \vec{AC} = x - z$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{CD} + \vec{BC} \times \vec{AD} &= (x - y)z + (y - z)x \\ &= (x - z)y = \vec{AC} \times \vec{BD} \quad (۱-۲، ۱.۵) \end{aligned}$$

هر گاه داشته باشیم $|AC| |BD|$ ، مانند شکل (۱.۵، ث)، پاره خط AC

فقط یکی از دو نقطه B یا D را در بر دارد و بنا بر این نسبتهای $\vec{AB} : \vec{BC}$ و $\vec{AD} : \vec{DC}$ مختلف‌العلامتند و در نتیجه حاصل‌ضربهای $\vec{AB} \times \vec{DC}$ و $\vec{BC} \times \vec{AD}$ نیز مختلف‌العلامتند

و بنا بر این حاصل‌ضربهای $\vec{AB} \times \vec{CD}$ و $\vec{BC} \times \vec{AD}$ هم‌علامت می‌باشند. در چنین حالتی رابطه (۱-۲، ۱.۵) برای اندازه‌های هندسی بردارها نیز محقق خواهد بود. اما اگر جفت A، C نسبت به جفت B، D جدا ساز نباشد، مانند شکل (۱.۵، پ)، علامتهای گفته

شده تغییر خواهند کرد؛ مثلاً حاصل‌ضربهای $\vec{AB} \times \vec{CD}$ و $\vec{BC} \times \vec{AD}$ مختلف‌العلامت می‌باشند. در این حالت وقتی اندازه‌های هندسی بردارها را در نظر بگیریم، از رابطه (۱-۲، ۱.۵) برمی‌آید که مقدار مثبت $AC \times BD$ که با تفاضل دو مقدار مثبت $AB \times CD$ و $BC \times AD$ برابر است از مجموع این دو مقدار مثبت کوچکتر خواهد بود، یعنی داریم:

$$AB \times CD + BC \times AD > AC \times BD$$

بنابراین برای حالتی که چهار نقطه بر یک خط واقع باشند، حکم قضیه (۲، ۱.۵):

ثابت شده است.

برای حالتی که چهار نقطه بر یک خط واقع نباشند، از بین آنها دست‌کم سه نقطه تشکیل مثلث می‌دهند. مثلاً مثلث ABC، و چهارمین نقطه، یعنی D، یا بر یکی از ضلعهای این مثلث واقع است و یا داخل یا خارج آن قرار خواهد داشت. در هر صورت بنابه قضیه بطلامپوس (قضیه ۱، ۶.۲) و عکس آن (قضیه ۲، ۶.۲) خواهیم داشت:

$$AB \times CD + BC \times AD \geq AC \times BD$$

تساوی فقط وقتی برقرار است که چهار نقطه بر یک دایره واقع باشند.

تمرینها

۱- هشت رابطه معادل با $|AC| |BD|$ را بنویسید.

۲.۵- نسبت ناهمساز (= غیر توافقی)

نسبت ناهمساز چهار نقطه غیر مشخص A، B، C، D که جدا از هم و به همین

ترتیب مفروضه عبارت است از عدد (ABCD) که برحسب فاصله‌های دو به دوی این نقطه‌ها به صورت فرمول زیر تعریف می‌شود:^۱

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}} \quad \left(\text{یا} \quad \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \cdot \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} \right)$$

هرگاه طرفین رابطه‌ای را که در قضیه (۲، ۱.۵) محقق شد بر $AC \times BD$ تقسیم کنیم، با توجه به تعریف بالا نتیجه خواهد شد که:

قضیه ۲، ۱.۵- برای آنکه نسبت‌های ناهمساز چهار نقطه جدا از هم در رابطه

$$(ADBC) + (ABDC) = 1$$

صدق کنند لازم و کافی است که $|AC| |BD|$ باشد.

این ارتباط بین نسبت‌های ناهمساز و «جدا سازی» امکان آن را بوجود می‌آورد که برعکس آنچه که قبلاً عمل کردیم عمل کنیم، یعنی به جای آنکه جدا سازی را برحسب دوایر تعریف کردیم، اکنون دوایر را برحسب جدا سازی تعریف کنیم! زیرا سه نقطه متمایز A, B, C یک دایره (یا یک خط) منحصر بفرد را مشخص می‌کنند و می‌توان آن را متشکل از همان سه نقطه و همه نقطه‌های X دانست به قسمی که:

$$|CX| |AB| \text{ یا } |BX| |CA| \text{ یا } |AX| |BC|$$

نمونه‌ها

۱- ثابت کنید که:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$$

۲- حاصل $(ADBC) + (ABDC)$ را در حالت‌های زیر حساب کنید:

الف) بین A و C و D خارج A و C بوده و نسبت فاصله‌های B از A و C برابر است با نسبت فاصله‌های D از A و C ، یعنی:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

۱- یادداشت از ح. غیور: نشانه \rightarrow از روی همه پاره خط‌های BD, AC ، ... باید حذف شود زیرا در $(ABCD)$ فاصله نقطه‌ها مطرح است. در حالتی که چهار نقطه بر یک استقامت باشند:

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

در حالتی که نقطه‌ها بر یک استقامت نیستند:

$$(ABCD) = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC}$$

(ب) مثلث ABC متساوی الاضلاع و D مرکز آن است.

(پ) ABDC مربع است.

(ت) ABCD مربع است.

۳-۵- انعکاس^۱

برای نخستین بار ل. ج. مگنوس^۲ در ۱۸۳۱ به کشف «تقریباً تبدیل» زیرنایل آمد. دایره ثابت ω به مرکز O و به شعاع k و نقطه P متمایز از O مفروض است، بنا به تعریف، منعکس نقطه P نقطه P' است که بر خط OP واقع بوده داشته باشیم:

$$\overline{OP} \times \overline{OP'} = k^2$$

از این تعریف برمی آید که P نیز منعکس P' است. بنابراین، انعکاس هم مانند تقارن مرکزی یا محوری نقطه ها را جفت به جفت متناظر می سازد. علاوه بر آن، منعکس هر نقطه واقع در داخل دایره انعکاس ω نقطه ای است واقع در خارج آن دایره و برعکس، بنابراین انعکاس «داخل و خارج دایره» را به یکدیگر تبدیل می کند. تنها نقطه هایی که مبدل هر کدام بر خودش واقع می شود نقاط واقع بر دایره انعکاس می باشند.

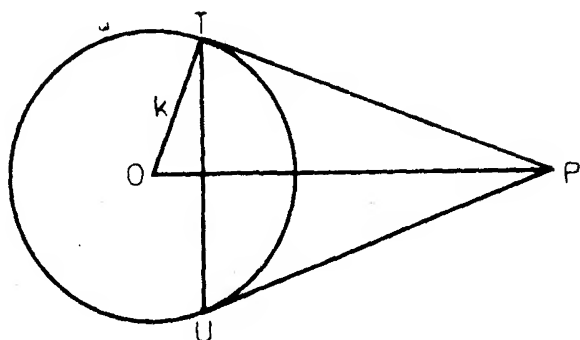
هرگاه P یک مکان هندسی (مثلاً یک منحنی) را بپیماید، P' مکان هندسی منعکس آن را خواهد پیمود. به ویژه، منعکس هر دایره به مرکز O و به شعاع r دایره ای است به مرکز O و به شعاع $r' = \frac{k^2}{r}$. هر خط که بر O بگذرد، منعکس آن بر خودش واقع است که البته نقطه O را باید از آن استثنا کرد. (باید توجه داشت که در این انطباق مبدل هر نقطه بر خودش واقع نیست. به علاوه انعکاس یک تبدیل پیوسته نمی باشد،

۱- توجه خواننده به این نکته جلب می شود که در اغلب آثار فرانسوی تبدیل انعکاس به این ترتیب تعریف می شود که نقطه ω را به نام قطب انعکاس و عدد مثبت یا منفی μ را به نام قوت انعکاس در نظر گرفته و منعکس هر نقطه M نقطه M' خواهد بود که اولاً M' بر امتداد OM باشد و ثانیاً $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \mu$ باشد. بنابراین تعریف، فقط در حالتی که μ مثبت است دایره انعکاس به مرکز ω و به شعاع $R = \sqrt{|\mu|}$ مشخص می شود که هر دایره گذرنده بر دو نقطه منعکس بر آن عمود می باشد.

برخلاف تعریف بالا، مؤلفان کتاب از همان ابتدا دایره انعکاس به مرکز ω و به شعاع k را در نظر گرفته و پرمینای آن انعکاس را تعریف کرده اند که با این ترتیب فقط انعکاس مثبت مورد بحث واقع شده است.

ناگفته نماند که بجز در آخرین بند (۷.۶) در سایر بندها هندسه مسطحه مورد نظر بوده است.

زیرا هر چه P به O نزدیکتر باشد P' به فاصله دورتر قرار خواهد گرفت. مطابق شکل (۳.۵، الف) دایره انعکاس ω و نقطه P را داخل آن در نظر می گیریم که O واقع نباشد. در نقطه P وتر TU را عمود بر OP رسم می کنیم.

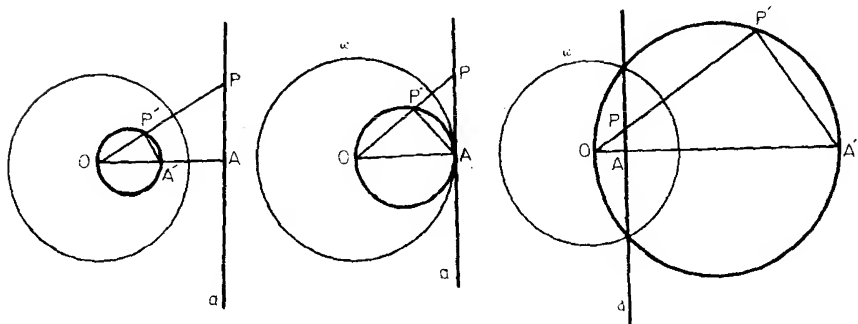


(شکل ۳.۵، الف)

مماسهایی که در T و U بر ω رسم شوند با خط OP در P' متقاربتند. از تشابه دو مثلث OPT و $OP'T$ برمی آید که:

$$\frac{OP}{OT} = \frac{OT}{OP'} \Rightarrow OP \times OP' = \overline{OT}^2 = k^2$$

بنابراین P' منعکس P است. برعکس، برای تعیین منعکس P' واقع در خارج ω ، دایره به قطر OP' را رسم می کنیم که با ω در T و U برخورد می کند، P وسط TU یعنی نقطه برخورد TU با OP' منعکس P' می باشد.



(شکل ۳.۵، ب)

با توجه به شکل (۳.۵، ب) نتیجه خواهد شد که منعکس هر خط a که بر O نگذرد دایره‌ای است که بر O می‌گذرد (خود نقطه O از آن استثنا است) و قطری از آن که بر O می‌گذرد بر a عمود است. زیرا اگر A پای عمود وارد از O بر a و P نقطه دلخواهی از a و A' منعکس A باشد، دایره به قطر OA' با OP در P' برخورد می‌کند. دو مثلث OAP و $OP'A'$ متشابهند و داریم:

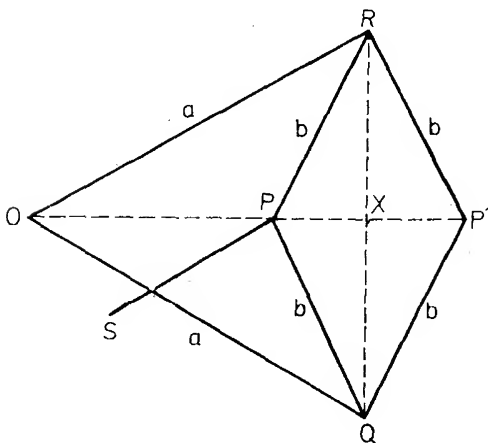
$$\frac{OP}{OA} = \frac{OA'}{OP'} \Rightarrow OP \times OP' = OA \times OA' = k^2$$

پس P' منعکس P است. یعنی منعکس هر نقطه از خط a بر دایره به قطر OA' واقع است.

برعکس هر نقطه P' از دایره به قطر OA' ، به غیر از نقطه O ، که در نظر بگیریم، منعکس آن بر خط a قرار خواهد داشت. بنابراین، منعکس هر دایره که بر O می‌گذرد خطی است عمود بر قطری از آن دایره که بر O می‌گذرد. اگر دایره در O و نقطه دیگر P' متقاطع باشند منعکسهای آنها دو خط می‌باشند که در P' منعکس P با یکدیگر برخورد می‌کنند. دو دایره که در O بر یکدیگر مماس باشند، منعکسهای آنها دو خط متوازی است.

ابزاری ساده در اختیار است که به کمک آن می‌توان منعکس هر مکان هندسی را رسم کرد. این ابزار که چندان پیچیده ترازیر گارنیست در ۱۷۸۱ توسط ل. لپیکین^۱ کشف و نود سال پس از آن توسط ۱. پوسلیه^۲ از نو اختراع گردید و فعلاً به نام عاکس پوسلیه معروف است. این عاکس مطابق شکل (۳.۵، ب) ارزشش تیغه تشکیل یافته است؛ دو عدد از

این تیغه‌ها به طول a بوده در O با یکدیگر در R و Q به دور آس مقابل لوزی $PQP'R$ که از چهار تیغه دیگر به طول b تشکیل یافته پیچ شده‌اند که $b < a$ است. تیغه‌ها در نقاط اتصال با یکدیگر به صورت مفصلی لولا گردیده‌اند به گونه‌ای که شکل همواره مسطح است اما اندازه‌های زاویه‌های آن قابل تغییر است. در نقطه O سوزنی تعبیه شده که به وسیله آن این نقطه



(شکل ۳.۵، ب)

ثابت می‌گردد. در نقطه P نیز سوزنی بکار رفته که آن را روی شکل مفروض حرکت می‌دهند. در نقطه P' مدادی نصب است که منعکس شکل مفروض را رسم می‌کند؛ زیرا اگر مرکز لوزی را با X بنماییم داریم:

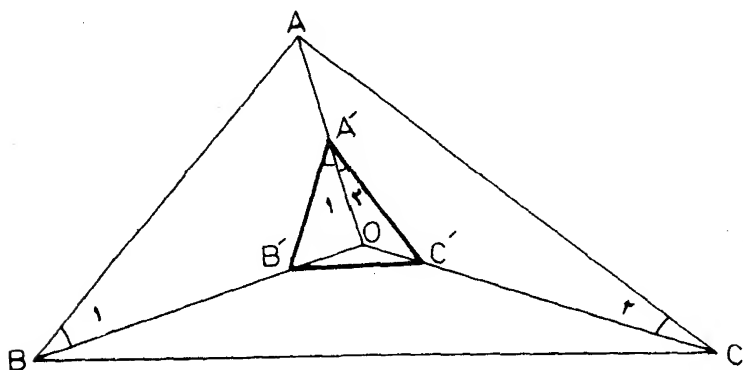
$$\begin{aligned}\overline{OP} \times \overline{OP}' &= (\overline{OX} - \overline{PX})(\overline{OX} + \overline{PX}) = \overline{OX}^2 - \overline{PX}^2 \\ &= \overline{OX}^2 - [\overline{PR}^2 - \overline{RX}^2] = [\overline{OX}^2 + \overline{RX}^2] - \overline{PR}^2 \\ &= \overline{OR}^2 - \overline{PR}^2 = a^2 - b^2 = \text{مقدار ثابت}\end{aligned}$$

این عاکس نقطه‌هایی از شکل را در برمی‌گیرد که حداکثر فاصله آنها از O برابر با $a+b$ و حداقل فاصله آنها از O برابر با $a-b$ باشد.

هرگاه تیغه هفتم SP را مطابق شکل بده عاکس وصل کنیم و علاوه بر نقطه S را نیز ثابت بداریم به قسمی که فاصله S از O برابر با طول SP باشد، در این صورت P بر دایره‌ای حرکت می‌کند که از O می‌گذرد، پس مکان P' یک خط مستقیم خواهد بود. بنابراین، عاکس پوسلیه وسیله‌ای است که امکان حل مسئله قدیمی و معروف «رسم خط بدون استفاده از خط کش» را فراهم ساخته است. (در ضمن ملاحظه می‌کنیم که استقامت خط رسم شده مستقل از خط مستقیم دیگر تحقیق یافته است). می‌توان گفت عاکس وسیله‌ای است که حرکت مستدیر را به حرکت مستقیم تبدیل می‌کند.

منعکس یک مثلث معمولاً شکلی است شامل کمانهایی از سه دایره که هر کدام از O می‌گذرند. صرف نظر از این شکل، اگر A, B, C رأسهای مثلث مفروض و A', B', C' منعکسهای آنها باشند، مطابق با شکل (۳.۵، ت)، بین نقطه O و مثلثهای ABC و $A'B'C'$ رابطه‌های جالبی برقرار است. برای سادگی شکل، نقطه O را در درون مثلث ABC می‌گیریم. از تساویهای:

$$OA \times OA' = k^2 = OB \times OB'$$



(شکل ۳.۵، ت)

نتیجه می شود که مثلثهای OAB و $OA'B'$ متشابهند و زاویه هایی از دو مثلث که با عدد ۱ نموده شده اند با هم برابرند. همچنین زاویه هایی از دو مثلث OAC و $OA'C'$ که با عدد ۲ نموده شده اند با هم برابرند. بنابراین زاویه BOC با مجموع زاویه های A و A' از دو مثلث ABC و $A'B'C'$ برابر است، زیرا داریم:

$$\widehat{BOC} = \hat{1} + \widehat{A'B'O} + \hat{2} + \widehat{A'C'O}$$

$$\widehat{A'B'O} = \widehat{BAO} \text{ و } \widehat{A'C'O} = \widehat{CAO}$$

$$\widehat{BOC} = \hat{1} + \hat{2} + \widehat{BAO} + \widehat{CAO} = \widehat{B'A'C'} + \widehat{BAC}$$

همچنین داریم:

$$\widehat{COA} = \hat{B} + \hat{B}'$$

بنابراین با معلوم بودن مثلث ABC می توانیم نقطه O را به قسمی تعیین کنیم که اندازه های زاویه های A' و B' از مثلث $A'B'C'$ مقادیر مشخص باشند. یا اینکه نقطه O که معین گردید می توان مقدار k را تغییر داد و در نتیجه ابعاد مثلث $A'B'C'$ را نیز تغییر داد (تمرین ۷ را ملاحظه کنید). هرگاه O در خارج مثلث ABC واقع باشد، روش اثبات با تغییراتی جزئی به همان گونه خواهد بود. همچنین می توان نقطه های A ، B ، C را بزرگ خط انتخاب کرد.

از آنچه گذشت قضیه زیر محقق شده است:

قضیه ۱-۳-۵- با انتخاب دایره انعکاس مناسب، می توان منعکسهای سه نقطه متمایز A ، B ، C را چنان بدست آورد که نقطه های حاصل داسهای مثلث $A'B'C'$ باشند که متساوی با مثلث مفروض باشد.

تمرینها

- ۱- منعکس مربع محیطی دایره انعکاس را رسم کنید.
- ۲- نقطه O چگونه انتخاب شود تا منعکس مثلث مفروض عبارت باشد از سه دایره متساوی؟
- ۳- دایره انعکاس ω به مرکز O و نقطه دلخواه P متمایز از O مفروض است. در دو حالت زیر منعکس نقطه P را با استفاده فقط از پرگار، بدون استفاده از خط کش، بدست آورید:

- ۱- با استفاده از ویژگیهای انعکاس می توان ثابت کرد که همه ترسیمات هندسی را می شود با استفاده فقط از پرگار انجام داد.

$$OP > \frac{k}{2} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{k}{2n} < OP \leq \frac{k}{2(n-1)} \quad (\text{ب})$$

۴- در هریک از حالت‌های زیر چیدرابطی بین مثلث ABC و منعکس آن وجود

دارد:

(الف) O مرکز دایره محیطی مثلث ABC است.

(ب) O مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.

(پ) O مرکز دایره محاطی مثلث ABC است.

۵- در صفحه محورهای مختصات، دایره انعکاس به معادله $x^2 + y^2 = k^2$ و

نقطه (x و y) در درون آن مفروض است. مختصات منعکس این نقطه را بدست آورید.

۶- دو مثلث ABC و DEF داده شده است. با ترسیمی اجمالی مرکز O و

شعاع k از دایره انعکاس را بد قسمتی تعیین کنید که اگر A', B', C' منعکسهای

C, B, A باشند، مثلث $A'B'C'$ بامثلث DEF برابر باشد.

۴.۵- انعکاس در صفحه

دیدیم که اگر دایره‌ای بر O، مرکز دایره انعکاس، بگذرد (و این نقطه O از

آن استثناء باشد)، منعکس آن یک خط است، و منعکس هر دایره بد مرکز O دایره دیگری

هم مرکز با آن می‌باشد. اکنون به بررسی این مسئله می‌پردازیم که اگر دایره بدوضع دیگر

باشد منعکس آن چگونه خواهد بود. اما پیش از آن باید این موضوع را بررسی کنیم که

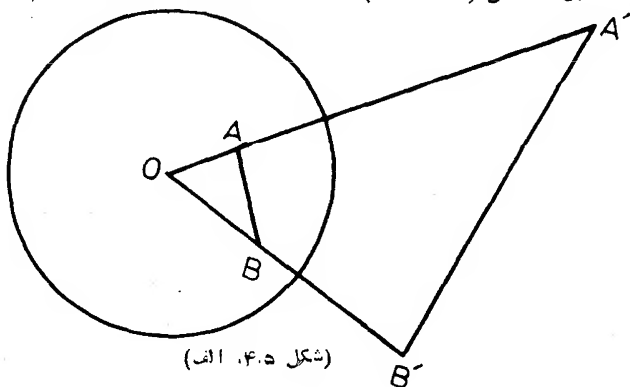
فاصله بین دو نقطه پس از انعکاس چگونه تغییر می‌کند.

قضیه ۴.۵-۱- هرگاه O و k مرکز و شعاع دایره انعکاس و A', B' منعکسهای

نقطه‌های مفروض A, B باشند، بین فاصله‌های آنها رابطه زیر برقرار است:

$$A'B' = \frac{k^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}$$

زیرا مطابق باشکله (۴.۵، الف) دو مثلث OAB و $OB'A'$ باهم متشابهند داریم:



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA \cdot OA'}{OA \cdot OB} = \frac{k^2}{OA \cdot OB}$$

از این ویژگی برمی آید که انعکاس نسبت ناهم‌ساز چهار نقطه را محفوظ می‌دارد، چنانکه در قضیه زیر بیان می‌شود:

قضیه ۲۰۴۰۵- هرگاه A', B', C', D' به ترتیب منعکسهای نقطه‌های A, B, C, D باشند داریم:

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

زیرا داریم:

$$\begin{aligned} (A'B'C'D') &= \frac{\overline{A'C'} \times \overline{B'D'}}{\overline{A'D'} \times \overline{B'C'}} = \frac{\frac{k^2 \cdot \overline{AC}}{OA \cdot OC} \times \frac{k^2 \cdot \overline{BD}}{OB \cdot OD}}{\frac{k^2 \cdot \overline{AD}}{OA \cdot OD} \times \frac{k^2 \cdot \overline{BC}}{OB \cdot OC}} \\ &= \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} = (ABCD) \end{aligned}$$

از این ویژگی نیز برمی آید که در انعکاس، ویژگی جداسازی بین دو جفت نقطه محفوظ می‌ماند:

قضیه ۲۰۴۰۵- هرگاه A', B', C', D' به ترتیب منعکسهای نقاط A, B, C, D باشند و اگر داشته باشیم $AC \parallel BD$ خواهیم داشت: $A'C' \parallel B'D'$ زیرا با توجه به قضیه‌های (۲۰۵۰۱) و (۲۰۴۰۵) از رابطه $AC \parallel BD$ نتیجه می‌شود که:

$$(A'D'B'C') + (A'B'D'C') = (ADBC) + (ABDC) = ۱$$

بنابراین داریم: $A'C' \parallel B'D'$

قبلاً در پایان بند ۲۰۵ ملاحظه کردیم که هر دایره را می‌توان متشکل از سه نقطه A, B, C و همه نقطه‌های X دانست که در یکی از رابطه‌های $AX \parallel BC$ یا $BX \parallel CA$ یا $CX \parallel AB$ صدق می‌کنند. از این خاصیت نتیجه می‌شود که منعکس این دایره متشکل است از سه نقطه A', B', C' و همه نقطه‌های X' که در یکی از رابطه‌های $A'X' \parallel B'C'$ یا $B'X' \parallel C'A'$ یا $C'X' \parallel A'B'$ صدق می‌کنند، پس این منعکس، دایره یا خطی است که بر سه نقطه A', B', C' می‌گذرد و البته فقط وقتی خط است که دایره مفروض بر O بگذرد. بنابراین قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم:

قضیه ۴،۴،۵- منعکس هردایره که بر O نگذرد دایره دیگری است که بر O نمی گذرد.
 تعریف دایره بر حسب جفت‌های جدا ساز نقاط مستلزم آن است که خط را حالت خاص دایره بدانیم، یعنی خط را دایره‌ای بدانیم که شعاع آن بینهایت بزرگ است. از اینرو بد صفحه اقلیدسی يك نقطه منحصر به فرد P_{∞} را اضافه می کنیم که منعکس نقطه O مرکز دایره انعکاس می باشد، و يك چنین صفحه را صفحه انعکاسی می نامیم. بنابراین دایره انعکاس به مرکز O هردایره گذرنده بر O را به يك خط تبدیل می کند، که خط را دایره‌ای می دانیم که بر P_{∞} می گذرد. همچنین منعکسهای دودایره که در O برهم مماس باشند دوخط متوازی است، که این دو خط متوازی را می توانیم دو دایره بگیریم که در P_{∞} برهم مماسند. با توجه بداین قراردادها می توانیم نتایج بند (۳،۵) و قضیه (۴،۴،۵) را یکجا به صورت قضیه زیر در صفحه انعکاسی بیان کنیم:

قضیه ۵،۴،۵- منعکس هردایره يك دایره است.

اضافه کردن نقطه P_{∞} بد صفحه اقلیدسی این امکان را فراهم می آورد که انعکاس را تبدیلی يك به يك بدانیم که هر نقطه از صفحه انعکاسی را با نقطه دیگری از آن متناظر می سازد: هر نقطه (بدون استثناء) از صفحه انعکاسی يك نقطه منعکس دارد و هر نقطه از صفحه انعکاسی منعکس نقطه دیگری از آن صفحه است.

دودایره را متقاطع، مماس یا جدا از هم می نامیم بر حسب آنکه تعداد نقطه‌های مشترک آنها ۲، ۱، یا ۰ باشد؛ دو دایره که هروضعی از این سه حالت را داشته باشند منعکسهای آنها نیز همان وضع را خواهند داشت که از دو دایره مماس برهم ممکن است یکی از آنها به صورت خط مماس بردایره دیگری اینک هردو به صورت دوخط متوازی باشند.

تمرینها

- ۱- دایره انعکاس ω و نقطه متغیر P را واقع بر آن و نقطه دلخواه A را در خارج آن در نظر بگیرید، ثابت کنید که نسبت $\frac{PA}{PA'}$ مقدار ثابت است. برعکس، اگر دو نقطه B و C بر AA' واقع باشند که یکی از آنها بین A و A' و دیگری در خارج AA' باشد و نسبتهای فاصله‌های آنها از A و A' با هم برابر و مخالف با يك باشند، ثابت کنید که دایره به قطر BC مکان هندسی نقطه‌هایی است که نسبت فاصله‌های آنها از A و A' با آن نسبتها برابر است. (این مکان هندسی را دایره آپولونیوس می نامند).
- ۲- بردایره انعکاس ω نقطه A و قطر BC از آن را در نظر می گیریم. قطر عمود بر BC با خطهای AB و AC در P و P' برخورد می کند. ثابت کنید که P' منعکس P است.

۳- ثابت کنید که بردونقطه واقع در داخل يك دایره بیش ازدو دایره نمیتوان رسم کرد که بردایره مفروض مماس باشند.

۴- سه نقطه جدا از هم به فاصله های a, b, c از یکدیگر واقعدند (ممکن است بريك خط واقع باشند یا اینکه مثلثی را تشکیل دهند). بهمركزهای این سه نقطه سه دایره دوبه دو برهم مماس می توان رسم کرد که شعاعهای آنها $s-a, s-b, s-c$ می باشد که s نصف مجموع $a+b+c$ است. ثابت کنید که دو دایره مماس براین هر سه دایره وجود دارد که باهم نقطه مشترك ندارند. این دو دایره رادایره های سدی (Soddy) می نامند.

۵- با استفاده از انعکاس، اثبات بسیار ساده قضیه (۲، ۱۰۵) را بیان کنید.

۶- دایره انعکاس ω بهمركز O ودایره a گذرنده بر O مفروض است. ثابت کنید که خط منعکس دایره a عبارت است از محور اصلی دودایره ω و a .

۷- با فرض اینکه هر خط را می توان حالت خاص دایره دانست، آیا دوخط متقاطع را می توان به دو دایره مماس یا دو دایره متقاطع تبدیل کرد؟ جواب را برحسب تعداد نقطه های مشترك دوخط مفروض تفسیر کنید

۵.۵- دایره های عمود برهم

با مطرح ساختن دواير، مطرح شدن زوایا خود به خود به میان می آید. زاویه بین دو دایره متقاطع همان زاویه ای است که مماسهای مرسوم بر آن دو دایره در یکی از نقاط تقاطعشان با یکدیگر می سازند؛ زیرا به علت تقارن نسبت به خط المركزین، زاویه های دو دایره در دو نقطه تقاطعشان با یکدیگر برابرند.

برای بررسی اینکه آیا در انعکاس نسبت به يك دایره به مركز O ، زوایا تغییر می کنند یا نه، دوخط a و b در نظر می گیریم که در P باهم برخورد کرده و با یکدیگر زاویه θ می سازند، شکل (۵.۵، الف) و همچنین شکل (۳.۵، ب) که پیش از این بررسی شد. در انعکاس نسبت به دایره به مركز O خط a به دایره α تبدیل می شود که بر O برمی گذرد و مماس براین دایره در O با a موازی است. خط b نیز به دایره β تبدیل می شود که بر O می گذرد و مماس بر آن در O با b موازی است. زاویه بین دو مماس که با θ برابر است بنا به تعریف زاویه بین دو دایره α و β می باشد. دو دایره α و β در نقطه دیگر P' که منعکس نقطه P است نیز متقاطعند و زاویه بین دو دایره در P' با زاویه بین آنها در O برابر بوده و همان θ است.

هرگاه a و b در O برخورد کرده باشند، منعکس هر کدام برخوردش واقع است و تغییرناپذیری θ بازهم ثابت است.

هرگاه a و b بردایره هایی که از P می گذرند مماس باشند، این دایره ها پس

قضیه ۳،۵،۵- هر دایره که بر دو نقطه متمایز منعکس یکدیگر بگذرد منعکس خودش می باشد و بردایره انعکاس ω عمود است.

برعکس، هر دایره که بردایره ω عمود باشد منعکس خودش است. زیرا اگر آن دایره در T با ω برخورد داشته و A نقطه دلخواهی از آن باشد، خط OA در نقطه دیگر A' با آن برخورد می کند به گونه ای که داریم:

$$OA \times OA' = \overline{OT}^2 = k^2$$

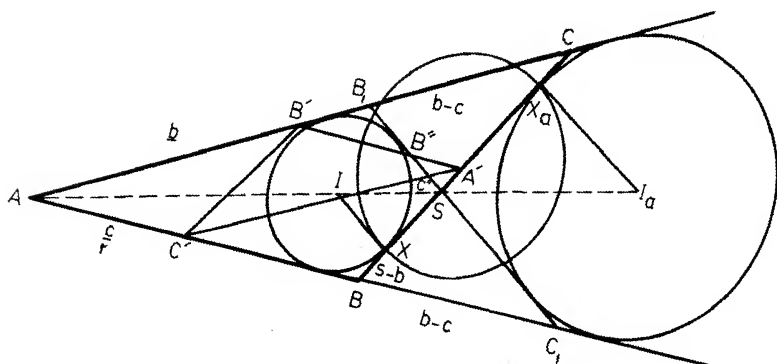
همچنین، هرگاه دو دایره عمود بر ω بایکدیگر برخورد داشته باشند، نقطه های مشترک آنها منعکس یکدیگرند. زیرا اگر A نقطه مشترک این دو دایره باشد، خط OA باید هر یک از دو دایره را در A' منعکس A تلاقی کند، پس هر دو دایره در A' مشترکند. از آنچه گذشت می توانیم انعکاس را بر حسب دایره های عمود بر ω به صورت زیر بیان کنیم:

با انتخاب دایره ω به عنوان دایره انعکاس، منعکس هر نقطه واقع بر ω برخورد واقع است و منعکس هر نقطه P غیر واقع بر ω عبارتست از نقطه دیگر برخورد دایره که بر P می گذرند و بر ω عمودند.

هرگاه در این تعریف خطی را جانشین دایره ω سازیم، براساس تعریف بالا نتیجه می گیریم که تقارن محوری را می توان حالت خاص انعکاس دانست.

بنا بر تعریف گفته شده، هر دایره a و دو نقطه منعکس یکدیگر (نسبت به دایره a) در انعکاس نسبت به دایره ω به ترتیب به یک دایره a' و دو نقطه منعکس یکدیگر (نسبت به دایره a') تبدیل می شوند. اکنون به مرحله ای رسیده ایم که با استفاده مشترک از صفحه اقلیدسی و صفحه انعکاسی می توانیم این موضوع را بررسی کنیم که منعکس نقطه A مرکز دایره a به چه وضعی در می آید. در وهله اول این تصور پیش می آید که منعکس A عبارت باشد از مرکز دایره a' ! آیا به همین سادگی خواهد بود؟ (در صورتی که می دانیم اگر a بر ω واقع شود این تصور درست نمی باشد). اما دایره a و دو نقطه A و P_{∞} (که نسبت به a منعکس یکدیگرند) در انعکاس نسبت به دایره ω به ترتیب به دایره a' و دو نقطه A' و O (که نسبت به a' منعکس یکدیگرند) تبدیل می شوند. بنا بر این مطابق باشک (۳،۵،۵)؛ مرکز دایره a' منعکس نقطه A (نسبت به دایره ω) نمی باشد، بلکه A' ، یعنی منعکس A نسبت به ω ، عبارتست از منعکس O نسبت به a' .

در شکل (۶.۵، الف)، مثلث ABC ، مثلث میانه‌ای آن $A'B'C'$ ، دایرهٔ محاطی داخلی آن به مرکز I که در X بر BC مماس است، دایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ A به مرکز I_a که در X_a بر BC مماس است. و بالاخره B_1C_1 مماس مشترک داخلی دیگر این دو دایره مشاهده می‌شود. دایرهٔ ω به قطر XX_a نیز رسم شده



(شکل ۶.۵، الف)

است و B_1C_1 با BC ، $A'B'$ ، $A'C'$ به ترتیب در S ، B'' ، C'' برخورد کرده‌است. دایرهٔ ω بر هر یک از دایره‌های به مرکزهای I و I_a عمود است، پس هر یک از دایره‌ها در انعکاس به دایرهٔ ω منعکس خودش می‌باشد. اکنون ثابت خواهیم کرد که در همین انعکاس خط B_1C_1 منعکس دایرهٔ نه نقطه است. با فرض اینکه S نصف محیط مثلث ABC باشد، بنا به قضیهٔ (۱، ۴.۱) داریم.

$$BX = X_aC = s - b$$

و از آنجا نتیجه می‌شود که A' وسط BC مرکز دایرهٔ ω است و طول قطر این دایره برابر است با:

$$XX_a = a - 2(s - b) = b - c$$

(نامگذاری رأسهای مثلث را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که این مقدار مثبت باشد). چون دایرهٔ نه نقطه بر A' مرکز دایرهٔ ω می‌گذرد پس منعکس آن نسبت به این دایره خطی است مستقیم. ثابت می‌کنیم که این خط بر B'' و C'' (و در نتیجه بر B_1 و C_1) می‌گذرد، یعنی ثابت می‌کنیم که B'' و C'' منعکسهای نقطه‌های B' و C' می‌باشند.

نقطهٔ S بر خط II_a یعنی بر نیمساز زاویهٔ A_1 واقع است، پس بنا به قضیهٔ

(۳،۳،۱) ضلع BC را به نسبت دوزلع دیگر مثلث ABC تقسیم می کند و داریم:

$$CS = \frac{ab}{b+c} \quad \text{و} \quad SB = \frac{ac}{b+c}$$

با محاسبه نصف تفاضل این دو مقدار داریم:

$$SA' = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

همچنین می دانیم که:

$$BC_{\setminus} = AC_{\setminus} - AB = AC - AB = b - c$$

$$CB_{\setminus} = BC_{\setminus} = b - c$$

مثلثهای $SA'B''$ و SBC_{\setminus} و همچنین مثلثهای $SA'C''$ و SCB_{\setminus} باهم متشابهند

و نتیجه می شود:

$$\frac{A'B''}{b-c} = \frac{A'B''}{BC_{\setminus}} = \frac{SA'}{SB} = \frac{b-c}{2c}$$

$$\frac{A'C''}{b-c} = \frac{A'C''}{CB_{\setminus}} = \frac{SA'}{SC} = \frac{b-c}{2b}$$

$$A'B' \times A'B'' = \frac{c}{2} \cdot \frac{(b-c)^2}{2c} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$A'C' \times A'C'' = \frac{b}{2} \cdot \frac{(b-c)^2}{2b} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

چون $\frac{b-c}{2}$ شعاع دایره ω است پس نسبت به دایره ω نقطه های B'' و C''

به ترتیب منعکسهای نقطه های B' و C' می باشند. بنا براین در انعکاس نسبت به دایره ω هر يك از دایره های محاطی به مركزهای I و I_a منعكس خودش می باشد و خط $B_{\setminus}C_{\setminus}$ منعكس دایره نه نقطه است، و چون این خط بر دودایره مزبور مماس است پس دایره نه نقطه نیز بر دو دایره مزبور مماس می باشد. با روش مشابه ثابت می شود که دایره نه نقطه بر هر يك از دو دایره محاطی خارجی دیگر مثلث نیز مماس است.

دایره نه نقطه بر نقطه های D ، E ، F (شکل ۴.۲، ب) می گذرد که این نقطه ها عبارتند از نقطه های برخورد ضلعهای مقابل چهار گوشه $ABCH$ (پایان بند ۴.۲ را ملاحظه کنید). به عبارت دیگر، چهار مثلث ABC ، BCH ، CAH و ABH دارای يك دایره نه نقطه اند اما دایره های محاطی آنها متفاوتند. بنا براین چهار گوشه ارتقاعی مجموعه شانزده دایره را مشخص می کند که همه بر دایره DEF مماس می باشند.

تمرینها

۱- با توجه به شکل (۵.۶، الف) ثابت کنید که زاویه B_1C_1 با BC برابر است با $B-C$.

۲- با توجه به شکل (۵.۶، الف) اگر D پای ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ABC باشد، ثابت کنید که نسبت به دایره S و D منعکسهای یکدیگرند.

۷.۵- دسته‌های دایره‌ها

پیش از این در بند (۳.۲) یادآوری کرده‌ایم که یک دسته دایره‌ها شامل دودایره α و β ، که آن را دسته دایره $\alpha\beta$ می‌نامیم، عبارتست از مجموعه دایره‌هایی که محور اصلی هر دو عدد از آنها همان محور اصلی دو دایره α و β باشد. بنابراین هر دسته دایره یک محور اصلی مشترك دارد و هر نقطه P متعلق به این محور اصلی نسبت به همه دایره‌های آن دسته دارای یک قوت است. هرگاه این قوت مقدار مثبت باشد، جذر آن طول مماسی را معین می‌کند که از نقطه P بر هر دایره دلخواه از دسته دایره رسم می‌شود و این مماسها عبارتند از شعاعهای دایره‌ای به مرکز P که بر همه دایره‌های آن دسته دایره عمود است. با توجه به اینکه نقطه P بر محور اصلی به دلخواه انتخاب شده است پس دایره‌های بی‌شمار می‌توان رسم کرد که همه بر دایره‌های یک دسته دایره عمود می‌باشند؛ این دایره‌ها نیز یک دسته دایره تشکیل می‌دهند که اگر γ و δ دودایره غیر مشخص از آن باشند آن را با $\gamma\delta$ مشخص می‌کنیم دودسته دایره $\alpha\beta$ و $\gamma\delta$ چنانند که هر یک از دایره‌های هر کدام از آنها بر همه دایره‌های دیگری عمود است و به علاوه، محور اصلی هر دسته عبارتست از خط‌المرکزین دسته دیگر: پس این دو خط، که هر کدام خط‌المرکزین یک دسته دایره و محور اصلی دسته دیگر است برهم عمودند. هرگاه به همان گونه که در بند (۳.۲) گفته شده است این دو خط عمود برهم را محورهای مختصات بگیریم، در این صورت معادله‌های دودسته دایره عبارت خواهند بود از:

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 - 2by - c = 0$$

که در آنها c مقدار ثابت اما a و b مقدارهای متغیرند. اگر $c > 0$ باشد، دسته نخست دایره‌های بدون نقطه‌های مشترك را دربردارد، که در شکل (۳.۲، الف) نمونه آن ملاحظه شده است، درحالی که دایره‌های دسته دیگر در دو نقطه حد به مختصات $(\pm\sqrt{c}, 0)$ مشترکند، که این دو نقطه را می‌توان دودایره به شعاع صفر متعلق به دسته نخست دانست که معادله‌های آنها عبارتند از:

$$(x - \sqrt{c})^2 + y^2 = 0 \quad \text{و} \quad (x + \sqrt{c})^2 + y^2 = 0$$

اگر $0 < c$ باشد پس از دوران حول محورهای مختصات به زاویه 90° درجه بازهم همان وضع بالا را خواهیم داشت؛ به عبارت دیگر دایره‌های دسته نخست همه در دو نقطه حد مشترکند و دایره‌های دسته دیگر نقطه مشترک ندارند. اگر $c = 0$ باشد دو دسته دایره‌های متماس عمود برهم داریم، یعنی همه دایره‌های هر دسته در مبدأ مختصات به ترتیب بر یکی از دو محور متماس می‌باشند.

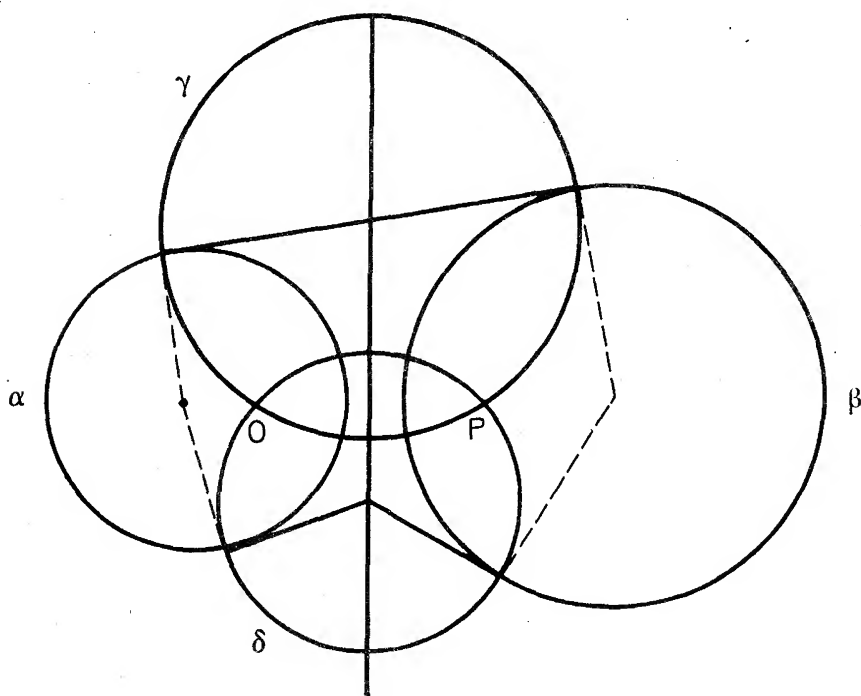
ترتیب دایره‌های هر دسته دایر بر حسب ترتیب نقاط تلاقی آنها با خطی که بر نقاط حد می‌گذرد مشخص می‌شود و از این راه معلوم شود که مثلاً از هر سه دایره کدام دایره بین دو دایره دیگر واقع است.

با توجه به عکس مطلب، می‌توان هر دسته دایر $\alpha\beta$ را به عنوان مجموعه دایره‌هایی که همه بر دایره γ و δ از دسته دایر $\gamma\delta$ عمودند تعریف کرد، و همچنین دسته دایر $\gamma\delta$ را مجموعه دایره‌هایی که همه بر دایره متمایز α و β عمود می‌باشند تعریف نمود. به عبارت دیگر، دسته دایر $\alpha\beta$ شامل همه دایره‌های عمود بر دایره متمایز عمود بر α و β می‌باشد.

هرگاه دایره γ و δ در دو نقطه O و P متقاطع باشند، انعکاس نسبت به هر دایره به مرکز O دو خط بدست می‌دهد که بر P' منعکس نقطه P می‌گذرند. دایره‌های عمود بر این خط دسته دایری هم مرکز به مرکز P' تشکیل می‌دهند، و مجموعه قطرهای این دایره‌ها منعکسهای دسته دایر $\gamma\delta$ می‌باشند. هرگاه دایره بدون نقطه مشترک در نظر گیریم بازهم همین نتیجه را خواهیم داشت. به سادگی می‌توانیم دایره متقاطع $\gamma\delta$ را چنان رسم کنیم که هر کدام دایره‌های α و β عمود باشند، یعنی دایره چنان رسم کنیم که مرکزهای آنها بر محور اصلی دایره α و β واقع باشد، مطابق شکل (۷.۵)، (الف)، از این رو قضیه زیر نتیجه می‌شود:

قضیه ۷.۵-۱- به وسیله انعکاس می‌توان دو دایره غیر مشخص غیر متقاطع را به دو دایره هم مرکز تبدیل کرد.

برای چنین تبدیلی کافی است که مرکز دایره انعکاس یکی از نقطه‌های حد O یا P از دسته دایر غیر متقاطع $\alpha\beta$ انتخاب شود. هرگاه α داخل β واقع باشد، هر دایره انعکاس به مرکز O (یا P) دایره α را به بزرگترین (یا کوچکترین) دایره‌های هم مرکز تبدیل خواهد کرد. هرگاه مرکز دایره انعکاس را ثابت نگاه داشته اما شعاع آن را تغییر دهیم، که در نتیجه یک جفت دیگر دایره‌های هم مرکز را جانشین جفت دایره‌های هم مرکز خواهیم ساخت که نسبت بین شعاعهای آنها محفوظ خواهد ماند و در نتیجه این تبدیل معادل است با حاصل ترکیب تبدیل اول بایک تجانس. همچنین، هر دایره انعکاس به مرکز P یک



(شکل ۲۰۵، الف)

جفت دایره هم مرکز را به جفت دیگر دایره‌های هم مرکز تبدیل خواهد کرد که شعاعهای آنها بر نسبت عکس خواهند بود.

هرگاه α و ω دو دایره دلخواه متمایز باشند، منعکس α نسبت به ω به دسته دایره $\alpha\omega$ تعلق خواهد داشت: هر دو دایره دلخواهی که بر هر یک از دو دایره α و ω عمود باشند بر منعکسهای آنها نیز عمود خواهند بود. اگر منعکس α را β بنامیم، دایره ω را دایره «نیمساز» دو دایره α و β می‌نامیم (در این مورد اصطلاح «دایره متشابه انعکاسی» نیز بکار می‌رود اما اصطلاح «نیمساز» مناسبتر است)^۱. دایره β به دسته دایره

۱- یادداشت از ح. غیوره: اصطلاح نیمساز در اینجا به این مناسبت است که اگر α و β و ω جزء یک دسته دایره باشند و α و β نسبت به ω منعکس یکدیگر باشند، در حالتی که α و β متقاطعند به سادگی ثابت می‌شود که دایره ω نیمساز دو دایره α و β است.

اگر سه منحنی C_1 و C_2 و C_3 از یک نقطه بگذرند و مماس مرسوم در این نقطه بر C_1 نیمساز نیمساز زاویه بین مماسهای مرسوم در این نقطه بر C_2 و C_3 باشد، منحنی C_1 نیمساز دو منحنی C_2 و C_3 در نقطه تقاطع آنها نامیده می‌شود. حال اگر منحنیها دایره باشند و یک دایره در هر دو نقطه تقاطع نیمساز دو دایره دیگر باشد، این دایره را بطور مطلق نیمساز دو دایره دیگر می‌گویند.

$\alpha\omega$ و دایره ω به دسته دایره $\alpha\beta$ تعلق خواهد داشت. اکنون در مرحله‌ای هستیم که به اثبات عکس قضیه (۵،۴۰۵) به شرح زیر بپردازیم:

قضیه ۲،۲۰۵- هر دو دایره دلخواه حداقل یک دایره نیمساز دارند؛ اگر دو دایره غیر متقاطع یا مماس باشند، دایره نیمساز آنها منحصر به فرد است؛ اگر دو دایره متقاطع باشند دارای دو دایره نیمساز عمود بر یکدیگر خواهند بود.

زیرا دایره که متقاطع باشند توسط انعکاس به دو خط متقاطع تبدیل می‌شوند که این دو خط متقاطع دارای دو نیمساز عمود برهم می‌باشند. در تبدیل عکس نتیجه می‌شود که دو دایره متقاطع دارای دو دایره نیمساز عمود بر یکدیگرند که این دو دایره بر نیمسازهای زاویه‌های بین مماسهای مرسوم بر دو دایره متقاطع در نقاط تقاطع آنها مماس می‌باشند. دو دایره α و β که برهم مماس باشند توسط انعکاس به دو خط متوازی تبدیل می‌شوند و در نتیجه بیش از یک دایره نیمساز ندارند.

هرگاه دو دایره α و β نقطه مشترک نداشته باشند، می‌توان توسط انعکاس آنها را به دو دایره هم مرکز به شعاعهای مثلا a و b تبدیل کرد. در این صورت این دو دایره نسبت به دایره به شعاع \sqrt{ab} و هم مرکز آنها متعکس یکدیگر می‌باشند و با تبدیل انعکاسی عکس نتیجه می‌شود که دو دایره غیر متقاطع α و β فقط یک دایره نیمساز دارند. اگر α و β دو دایره متساوی باشند دایره نیمساز آنها همان محور اصلی آنها می‌باشد.

تمرینها

۱- چه رابطه‌ای بین c و c' باید برقرار باشد تا دو دایره به معادله‌های زیر برهم عمود باشند؟

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 - 2by + c' = 0$$

۲- دو دایره نسبت به هم مماس داخلی اند. ثابت کنید که شعاع دایره نیمساز آنها برابر است با واسطه نوافقی شعاعهای آن دو دایره.

۳- دو دسته دایره مماس عمود برهم را در نظر بگیرید. هرگاه نقطه مشترک همه این دایره‌ها مرکز دایره انعکاس انتخاب شود و دایره‌ها نسبت به این دایره انعکاس تبدیل گردند، نتیجه حاصل چه خواهد بود؟

۴- آیا می‌توان دو دایره دلخواه را به دو دایره متساوی تبدیل کرد؟

۵- ثابت کنید که محور اصلی دو دایره متساوی غیر مشخص دایره نیمساز آنها است.

۶- ثابت کنید که هر چهار نقطه دلخواه متمایز را می‌توان به چهار رأس یک متوازی-الاضلاع $A'B'C'D'$ تبدیل کرد (که ممکن است در حالت خاص چهار نقطه A' ، B' ، C' ، D' بر یک خط راست واقع باشند اما داشته باشیم: $A'B' = D'C'$ و $A'D' = B'C'$).

دانهمایی : سه حالت زیر را جداگانه در نظر بگیرید:

$$\text{الف - } AC \parallel BD$$

$$\text{ب - } AD \parallel BC \text{ یا } AB \parallel CD$$

پ - A, B, C, D بر یک دایره واقع نباشند.

۷- دودایره غیرمقاطع داده شده است ، دایره نیمساز آنها را رسم کنید.

دانهمایی : با توجه به تمرین ۳ از بند ۵.۵ ، چگونگی تعیین نقطه‌های حد یک دسته دایره $\alpha\beta$ را در حالتی که α و β دودایره غیرمقاطع با مرکزهای مختلف باشند بررسی کنید.

۸.۵- انحراف انعکاسی^۱

زاویه بین دودایره متقاطع در واقع انحراف آنها از یکدیگر است ، و چون در تبدیل انعکاسی ، نیمساز زاویه به نیمساز زاویه تبدیل می‌شود ، پس هر یک از دودایره نیمساز دو دایره متقاطع ، در واقع انحراف بین آن دو دایره را نصف می‌کند. برای اینکه این ویژگی را درباره دایره نیمساز دو دایره غیرمقاطع تعمیم دهیم ، نوعی انحراف را بین آن دو دایره تصویری کنیم که دایره نیمساز آنها آن را به تساوی بین آن دو بخش می‌کند. برای تحقق چنین تصویری ، برای هر دو دایره α و β انحرافی به نام انحراف انعکاسی و با نماد (α, β) در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که اگر دایره γ به دسته دایره $\alpha\beta$ تعلق داشته و β بین α و γ واقع باشد رابطه زیر را داشته باشیم:

$$(\alpha, \beta) + (\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) \quad (۱۰۸.۵)$$

در انعکاسی که مرکزش یکی از نقطه‌های حد دسته دایره $\alpha\beta$ باشد ، سه دایره مزبور به سه دایره هم مرکز به شعاعهای a, b, c تبدیل می‌شوند که یکی از دو رابطه $a < b < c$ یا $a > b > c$ و همچنین رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

با توجه به اینکه لگاریتم عمل ضرب را به عمل جمع تبدیل می‌کند ، این رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left(\lg \frac{a}{b}\right) + \left(\lg \frac{b}{c}\right) = \left(\lg \frac{a}{c}\right)$$

از اینرو ، انحراف انعکاسی دودایره α و β را به صورت زیر اختیاری کنیم:

$$(\alpha, \beta) = \left| \lg \frac{a}{b} \right| \quad (۲۰۸.۵)$$

که اگر $a > b$ باشد، داریم $(\alpha, \beta) = \lg \frac{a}{b}$ و اگر $a < b$ باشد، داریم $(\alpha, \beta) = \lg \frac{b}{a}$

و به این ترتیب رابطه (۱۰۸.۵) برای سه دایره هم مرکز موز به وضوح محقق می باشد. علامت \log که برای خواننده آشنا می باشد به معنی لگاریتم به پایه ۱۰ می باشد؛ یعنی رابطه $x = \log y$ به معنی $y = 10^x$ می باشد. پایه ۱۰ در عدد نویسی از این جهت بکار رفته است که انسان ده انگشت دارد. در ریاضیات لگاریتم را با پایه e بکار می برند که e عدد متعالی است برابر با:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰...$$

در این صورت $x = \lg y$ (که آن را به صورت $x = \ln y$ یا به صورت $x = \text{Lg } y$ نیز می نویسند و آن را «لگاریتم طبیعی» y می نامند) به معنی آن است که:

$$y = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

همچنین لگاریتم طبیعی به صورت سری زیر مشخص می شود:

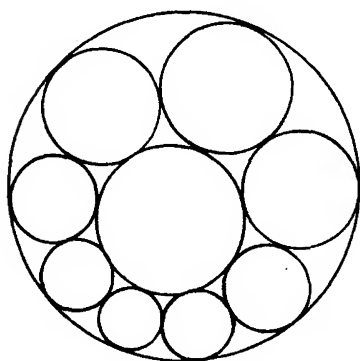
$$\lg(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$$

بنا به تعریف، انحراف انعکاسی دو دایره غیز مشخص غیر متقاطع عبارتست از لگاریتم طبیعی نسبت شعاعهای دو دایره هم مرکزی که دو دایره مفروض را می توان به آنها تبدیل کرد (در نسبت شعاعها آن را که بزرگتر است صورت می گیریم).

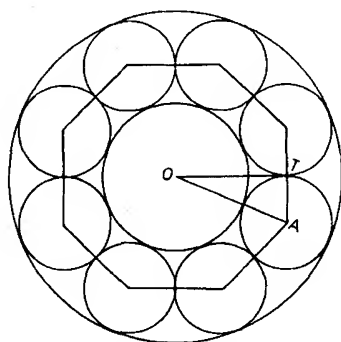
با توجه به اینکه دایره های هم مرکز مبدلهای دایره های متعلق به يك دسته دواير می باشند، يك چنین «انحراف» برای دایره های آن دسته دواير دارای ویژگی جمعی (به معنی رابطه ۱۰۸.۵) خواهد بود. به ویژه، دایره نیمسان دو دایره غیر متقاطع انحراف انعکاسی آنها را نصف می کند. همچنین با قبول اینکه دو خط متوازی حالت حدی دو دایره هم مرکز می باشند، مجاز خواهیم بود که انحراف انعکاسی دو دایره مماس بر هم را صفر بگیریم.

اکنون دو دایره متداخل با مرکزهای متفاوت را در نظر می گیریم. مطابق با شکل (۸.۵، الف) می توانیم يك سلسله دایره رسم کنیم که متوالیاً بر هم مماس باشند و هر کدام

از آنها بردو دایره مفروض نیز مماس باشد. در این سلسله دواير، که تعداد آنها را n می گیریم، می توانیم هر يك از آنها را اولین دایره بگیریم که بر دومین دایره و بر آخرین دایره مماس می باشد. شکل حاصل به چپستان اشتینر^۱ معروف است و با استفاده از قضیه (۱، ۷.۵) به سادگی می توان ثابت کرد که انجام پذیر است. برای این کار کافی است که دایره های متداخل مفروض را به دایره های هم مرکز تبدیل کنیم که در این صورت سلسله دایره های مورد نظر به دایره هایی برابر با هم تبدیل می شوند که مرکزهای آنها رأسهای يك n ضلعي منتظم خواهند بود، مطابق با شکل (۸.۵، ب)، اگر A مرکزی از این دایره های متساوی و T نقطه تماس آن با دایره متوالیش و O مرکز مشترك مبدل های دو



(شکل ۸.۵ الف)



(شکل ۸.۵ ب)

دایره مفروض باشد، با فرض آنکه شعاعهای دودایره هم مرکز آنکه بزرگتر است a و دیگری b باشد، خواهیم داشت:

$$OA = \frac{a+b}{2} \quad \text{و} \quad AT = \frac{a-b}{2}$$

اندازه زاویه AOT برابر با $\frac{\pi}{n}$ رادیان و انحراف انعکاسی دودایره برابر با

$$\delta = \lg \frac{a}{b} \quad \text{است و داریم:}$$

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{AT}{OA} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{e^{\delta} - 1}{e^{\delta} + 1}$$

بنابراین چیستان اشتینر درحالتی محقق است که انحراف انعکاسی دو دایره مفروض در رابطه زیر صدق کند:

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{e^{\delta} - 1}{e^{\delta} + 1}$$

این معادله را برحسب δ حل می کنیم:

$$e^{\delta} = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}} = \left(\frac{1 + \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^2 = \left(\sec \frac{\pi}{n} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right)^2$$

$$\delta = 2 \lg \left(\sec \frac{\pi}{n} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right) \quad (3, 8.5)$$

اگر به ویژه $n = 4$ باشد، انحراف انعکاسی دودایره برابر می شود با:

$$\delta = 2 \lg(\sqrt{2} + 1)$$

و در این حالت شکل نظیر شامل شش دایره است که هر کدام از آنها بر چهار دایره دیگر مماس می باشد. این شش دایره به سه جفت دایره های «متقابل» بخش می شوند که هر دایره بر همه دایره های دیگر، مگر بر دایره متقابلش مماس است. انحراف انعکاسی دودایره متقابل برابر با $2 \lg(\sqrt{2} + 1)$ است درحالی که انحراف انعکاسی هر دو دایره غیر متقابل صفر است.

هرگاه سلسله دایره های چیستان اشتینر پس از d دور شکل گیرد، در این صورت

$$\text{باید در رابطه های گذشته } n \text{ را با } \frac{n}{d} \text{ جانشین سازیم.}$$

هر دایره با مرکز و شعاعش مشخص می شود و چون در صفحه مرکز دایره بادو مختص معین می گردد، پس مجموعه همه دایره های صفحه اقلیدسی و منعکسهای آنها با معادله ای سه پارامتری مشخص می گردند که هر يك از پارامترها می تواند تغییراتی تا بینهایت داشته باشد. هرگاه چنین تعبیر کنیم که این سه تأییدهای نامحدود از دایره های متعلق به صفحه انعکاسی، صفحات فضای سه بعدی را مشخص می کنند، می توانیم به هندسه نااقلیدسی مشهور گوس، بلیانی، لوباشفسکی^۱ دست یابیم که بین سالهای ۱۸۲۰ و ۱۸۳۰ هر کدام از آنان مستقلاً به کشف آن نایل آمدند. زاویه های متشکل از دو دایره متقاطع در این هندسه به زاویه های بین دو صفحه که در يك خط متقاطعند تبدیل می شوند؛ دو دایره مماس برهم به دو صفحه متوازی تبدیل می شوند؛ انحراف انعکاسی دودایره غیر متقاطع عبارت می شود

از فاصله بین دو صفحه غیرمقاطع که يك عمود مشترك دارند و طول آن فاصله مزبور را معین می کنند.

تمرینها

- ۱- ثابت کنید که در چیستان اشتینر، نقاط تماس دایره های متوالی بر دایره نیمساز دودایره مفروض واقعند (در واقع دایره نیمساز، یا دایره های نیمساز، دو دایره دلخواه α و β را می توان مکان هندسی نقطه P دانست که این نقطه P نقطه تماس دو دایره ای است که هر کدام از آنها بر دایره های α و β نیز مماسند).
- ۲- ثابت کنید که معادله $(۳، ۸.۵)$ را می توان چنین نوشت:

$$\delta = 2 \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n} \right)$$

- ۳- اولاً سه دایره متساوی رسم کنید که برهم مماس باشند. ثانیاً سه دایره دیگر با همان ویژگی را چنان رسم کنید که هر کدام از آنها بر دو دایره از مجموعه اول نیز مماس باشند. انحرافهای انعکاسی بین این شش دایره را تعیین کنید.

۹.۵- تابعهای هذلولوی

تابعهای مثلثاتی زاویه، زاویه بین دو دایره متقاطع، را می شناسیم. تابعهایی از انحراف انعکاسی دو دایره غیر متقاطع تعریف شده است که به مناسبت اینکه هندسه نااقلیدسی گوس، بولیائی، لوبچفسکی، به هندسه هذلولوی معروف است آنها را تابعهای هذلولوی (تابعهای هیپر بولیک) می نامند. این تابعها عبارتند از: سینوس هیپر بولیک با نماد sh ، کسینوس هیپر بولیک با نماد ch ، تانژانت هیپر بولیک با نماد th ، و برحسب تابع نمائی e^x طبق فرمولهای زیر تعریف می شوند:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

از این فرمولها رابطه های مختلف بدست می آید، از جمله:

$$chx + shx = e^x, \quad chx - shx = e^{-x}$$

اکنون طبق جدول زیر تشابهات موجود بین دو نوع تابعهای مثلثاتی وهذلولوی را

ملاحظه می کنیم:

$$sh 0 = 0, ch 0 = 1$$

$$th 0 = 0, th \infty = 1$$

$$ch^2 X - sh^2 X = 1$$

$$\frac{sh X}{ch X} = th X$$

$$sh^2 \frac{X}{2} = \frac{ch X - 1}{2}$$

$$ch^2 \frac{X}{2} = \frac{ch X + 1}{2}$$

$$th \frac{X}{2} = \frac{ch X - 1}{sh X}$$

$$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$$

$$tg 0 = 0, tg \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin^2 X + \cos^2 X = 1$$

$$\frac{\sin X}{\cos X} = tg X$$

$$\sin^2 \frac{X}{2} = \frac{1 - \cos X}{2}$$

$$\cos^2 \frac{X}{2} = \frac{1 + \cos X}{2}$$

$$tg \frac{X}{2} = \frac{1 - \cos X}{\sin X}$$

با توجه به ملاحظات بالا، معادله (۳، ۸.۵) به صورت زیر درمی آید:

$$th \frac{\delta}{2} = \sin \frac{\pi}{n} \quad یا \quad sh \frac{\delta}{2} = tg \frac{\pi}{n} \quad یا \quad ch \frac{\delta}{2} = \sec \frac{\pi}{n}$$

شاید خوانندگان به اهمیت نقش ریشه NH_4 آمونیم در شیمی وقوف داشته باشند؛ این ریشه مانند يك اتم سدیم یا يك اتم پتاسیم عمل می کند و در عین حال به اتمهای ازن و هیدروژن قابل تجزیه است. در مقام مقایسه می توان گفت که نقش تابعهای هذلولوی در ریاضیات نیز از يك چنین اهمیتی برخوردار است؛ این تابعها مانند تابعهای مثلثاتی عمل می کنند و در عین حال بر حسب تابعهای نمایی قابل بیان می باشند. وانگهی، برای خوانندگانی که با تابعهای با يك متغیر مختلط آشنایی دارند و معنی فرمولهای:

$$\cos X = ch iX, \quad i \sin X = sh iX$$

را درمی یابند دیگر گفتگو از شیمی و مقایسه موردی نخواهد داشت.

از موضوع خارج نشویم و همان بحث مربوط به زاویه بین دو دایره متقاطع و انحراف بین آنها را دنبال کنیم. دو دایره به شعاعهای a و b و به طول خط المرکزین c را در نظر می گیریم. هرگاه هر يك از سه مقدار a, b, c از مجموع دوتای دیگر کوچکتر باشد، دو دایره در دو نقطه متقاطع می باشند که هر يك از این نقطه های تقاطع با مرکزهای دو دایره مثلثی تشکیل می دهد. زاویه بین دضلع a و b از این مثلث همان زاویه بین دو دایره است و مقدار کسینوس آن برابر است با:

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

اگر یکی از سه مقدار a, b, c از مجموع دوتای دیگر بزرگتر باشد، دو دایره

مقاطع نیستند و مثلثی تشکیل نمی‌شود. در این حالت سعی می‌کنیم تا تعبیری هندسی برای عبارت بالا، یعنی:

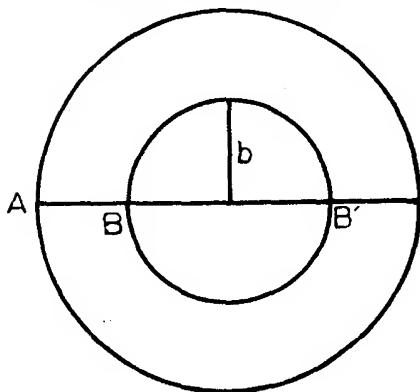
$$\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

بدست دهیم. هرگاه این دودایره هم‌مرکز باشند، یعنی $c=0$ ، و AA' و BB' قطرهایی از دودایره باشند که در امتداد یکدیگرند، رابطه $AB' \parallel A'B$ برقرار می‌باشد. مطابق شکل (۹،۵ الف)، انحراف انعکاسی این دو دایره $\delta = \lg \frac{a}{b}$ است و نسبت ناهمسا

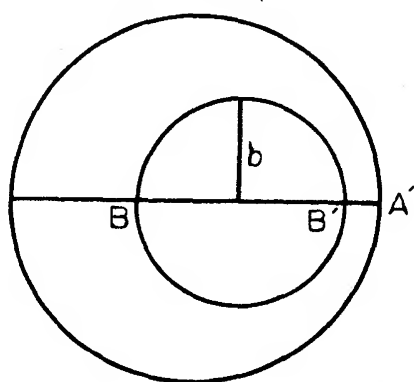
چهار نقطه A, A', B, B' بر حسب δ عبارت می‌شود از:

$$\begin{aligned} (AA'BB') &= \frac{\overline{AB} \times \overline{A'B'}}{\overline{AB'} \times \overline{A'B}} = \left(\frac{AB}{AB'} \right)^2 = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \\ &= \left(\frac{e^\delta - 1}{e^\delta + 1} \right)^2 = \frac{e^{2\delta} + 1 - 2e^\delta}{e^{2\delta} + 1 + 2e^\delta} = \frac{e^\delta + e^{-\delta} - 2}{e^\delta + e^{-\delta} + 2} \\ &= \frac{ch\delta - 1}{ch\delta + 1} \end{aligned}$$

هرگاه این دو دایره را منعکسهای دودایره غیر متقاطع به خط مرکزین بد طول c در نظر بگیریم و شعاعهای آنها a و b و نقاط برخورد خط مرکزین با آنها A, A' و B, B' باشد (که داشته باشیم $AB' \parallel A'B$)، بنا به قضیه‌های (۲،۴.۵) و (۳،۴.۵)



(شکل ۹.۵، الف)



(شکل ۹.۵، ب)

نسبت ناهمساژ و جداسازی محفوظ بوده و باز هم خواهیم داشت:

$$(AA'BB') = \frac{ch\delta - 1}{ch\delta + 1}$$

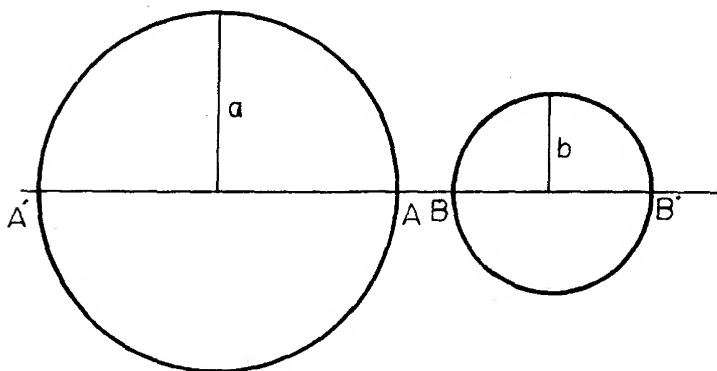
که باید آن را برحسب a, b, c بدست آوریم. مطابق با شکل (۹.۵ ب) یعنی در حالت $a - b > c$ داریم:

$$\begin{aligned}(AA'BB') &= \frac{\overline{AB} \times \overline{A'B'}}{\overline{AB'} \times \overline{A'B}} = \frac{(a+c-b)(a-c-b)}{(a+c+b)(a-c+b)} = \frac{(a-b)^2 - c^2}{(a+b)^2 - c^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - 2ab}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\end{aligned}$$

بنابراین داریم: $ch\delta = \gamma$. در حالتی که داشته باشیم $a + b < c$ مطابق با شکل (۹.۵ پ) داریم:

$$\begin{aligned}(AA'BB') &= \frac{\overline{AB} \times \overline{A'B'}}{\overline{AB'} \times \overline{A'B}} = \frac{(c-a-b)(c+a+b)}{(c-a+b)(c+a-b)} = \frac{c^2 - (a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} \\ &= \frac{-a^2 - b^2 + c^2 - 2ab}{-a^2 - b^2 + c^2 + 2ab} = \frac{-\gamma - 1}{-\gamma + 1}\end{aligned}$$

و در نتیجه داریم: $ch\delta = -\gamma$.



(شکل ۹.۵ پ)

در آنچه گذشت رویهم اثبات قضیه زیر انجام گرفته است:

قضیه ۹.۵-۱ مقدار انحراف انعکاسی δ بین دو دایره غیر متقاطع به شعاعهای a و b و به طول خط الممرکزی c در رابطه زیر صدق می کند:

$$ch\delta = \left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right|$$

یادآوری - منحنی نمایش تابع $y = chx$ به زنجیره موسوم است و در واقع شکل زنجیر یا نخ است که دوسرش را گرفته و به حالت آویزان قرار داده باشند.

هرگاه دودایره به طول خط‌المرکزین c چنان باشند که اولی به شعاع a بر یک چهار گوشه محیط و دومی به شعاع b در همان چهار گوشه محاط باشد، چنانکه می‌دانیم رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{(a-c)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} = \frac{1}{b^2}$$

این رابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$|a^2 + b^2 - c^2| = b\sqrt{4a^2 + b^2}$$

و برای δ انحراف انعکاسی دودایره خواهیم داشت:

$$ch\delta = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2ab} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

و چون داریم $ch^2\delta = 1 + sh^2\delta$ بنابراین در مورد دودایره مزبور داریم:

$$sh\delta = \frac{b}{2a}$$

تمرینها

۱- دودایره به شعاعهای ۱ و به طول خط‌المرکزین $2(\sqrt{3} + 1)$ داده شده است. دایره دیگری به شعاع ۱ چنان رسم کنید که سطح بین آنها را به تساوی بخش کند. آیا این دایره انحراف انعکاسی بین دودایره مفروض را نیز نصف می‌کند؟ و آیا این دایره، دایره نیمساز آنها است؟

۲- ثابت کنید که انحراف انعکاسی بین دایره‌های سدی (تمرین ۴ از بند ۴۰۵ را ملاحظه کنید) در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$ch \frac{\delta}{2} = 2$$

۳- می‌دانیم که دو دایره متخارج دارای چهار مماس مشترك می‌باشند. اگر δ انحراف انعکاسی این دو دایره باشد، ثابت کنید که نسبت بین طولهای بزرگترین و کوچکترین مماس مشترك برابر است با $th \frac{\delta}{2}$.

۴- خطی به فاصله p از مرکز دایره به شعاع b واقع است. هرگاه $p < b$ باشد خط با دایره يك زاویه δ می‌سازد که ثابت کنید $\cos \delta = \pm \frac{p}{b}$ ، اگر $p > b$ باشد ثابت کنید که انحراف انعکاسی بین خط و دایره از فرمول $ch\delta = \frac{p}{b}$ بدست می‌آید.

۵- شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی مثلث را با R و r می‌نماییم. ثابت کنید که δ انحراف انعکاسی این دودایره در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$sh \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{R}}$$

داهنمادی: از قضیه (۲، ۱۰۲) می‌توانید استفاده کنید.

۶- ثابت کنید که اگر یکی از زاویه‌های مثلث ABC منفرجه باشد دایره محیطی و دایره نه نقطه آن به زاویه δ یکدیگر را تلاقی می‌کنند که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = -\cos A \cos B \cos C$$

و اگر مثلث قائم‌الزاویه یا حاد‌الزاویه باشد، δ انحراف انعکاسی بین دودایره مذکور در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$sh^2 \frac{\delta}{2} = \cos A \cos B \cos C$$

۷- دایره‌های به معادله‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 + y^2 - 2ax + d^2 = 0, \quad a > d > 0$$

$$x^2 + y^2 - 2bx + d^2 = 0, \quad b > d > 0$$

و فرض می‌کنیم $th\alpha = \frac{d}{a}$ و $th\beta = \frac{d}{b}$. ثابت کنید که انحراف انعکاسی این دایره برابر است با: $|\alpha - \beta|$

آشنایی با هندسهٔ تصویری

اکنون که هندسه و مثلثات را یاد گرفته‌اید، مسئله‌ای برای شما مطرح می‌کنم: یک کشتی به سوی دریا در شرف حرکت است. بار آن پشم است و ظرفیت خالص آن ۲۰۰ تن می‌باشد. بندری که از آن می‌خواهد حرکت کند بوستن است و مقصد آن لوه‌اورنی می‌باشد. بساد از سمت شرق - شمال شرقی می‌وزد و ماه مه می‌باشد. سن کاپیتان کشتی چقدر است؟

گوستاو فلوبر

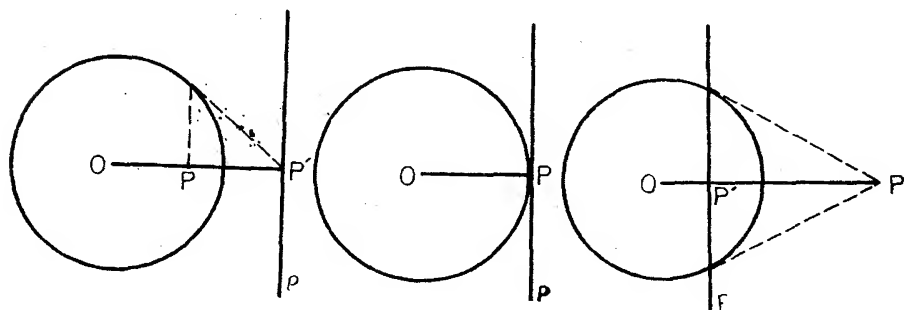
در همهٔ تبدیلهایی که تاکنون ملاحظه کردیم، نقطه متناظر با نقطه بود. اما اصل دوگانگی که سیمای مشخصهٔ «صفحهٔ تصویری» را نشان می‌دهد امکان آن را فراهم می‌آورد که نقطه با خط و یا خط با نقطه نظیر گردد. یکی از تبدیلهای جدید، که وجد تشابهی با انعکاس دارد، تبدیل «قطبی معکوس» نسبت به دایره می‌باشد. در این تبدیل، هر نقطهٔ غیر از O مرکز دایره با یک خط، و هر خط که بر O نگذرد با یک نقطه متناظر می‌باشد، مبدل هر دایره یک «مقطع مخروطی» است که یکی از کانونهایش نقطهٔ O است.

در پایان این بخش، پس از آنکه انواع مقطعهای مخروطی بررسی گردید، مقایسه‌ای احتیاط‌آمیز بین هندسهٔ انعکاسی و هندسهٔ تصویری انجام خواهد گرفت.

۱.۶- قطب و قطبی - تبدیل قطبی معکوس

دایرهٔ ω به مرکز O و به شعاع k را در نظر می‌گیریم. در صفحهٔ دایره، نظیر هر نقطهٔ P متمایز از O یک خط p وجود دارد که بر P' ، منعکس P نسبت به

ω ، می گذرد؛ این خط را قطبی P نسبت به ω می نامیم. برعکس نظیر هر خط p که بر O نگذرد يك نقطه P وجود دارد که بر عمود OP' وارد از O بر p واقع است و منعکس نقطه P' نسبت به ω می باشد؛ این نقطه قطب خط p نامیده می شود. بنابراین نسبت به دایره ω ، هر نقطه غیر از O يك قطبی دارد و هر خط غیر گذرنده بر O يك قطب دارد ، مطابق با شکل (۱.۶ ، الف).



(شکل ۱.۶ ، الف)

با استفاده از ویژگیهای انعکاس و با توجه به شکل (۳.۵ ، الف) نتیجه می گیریم که: اگر P داخل دایره باشد قطبی آن p در خارج دایره واقع است و برای رسم آن می توانیم در P عمودی بر OP اخراج کنیم تا با دایره برخورد کند و در نقطه برخورد مماسی بر دایره رسم کنیم تا با OP تلاقی کند، به این ترتیب P' بدست می آید و p را رسم می کنیم؛ اگر P بر دایره واقع باشد قطبی آن بر دایره مماس است و بر P می گذرد؛ اگر P در خارج دایره باشد قطبی آن با دایره متقاطع است و برای رسم آن می توان از P بر دایره دو مماس رسم کرد و نقطه های تماس را به یکدیگر وصل نمود. همچنین، اگر خطی با دایره متقاطع باشد قطب آن در داخل دایره واقع است؛ اگر خطی بر دایره مماس باشد قطب آن همان نقطه تماس است؛ اگر خط با دایره متقاطع باشد قطب آن در خارج دایره قرار دارد. از این پس برای سادگی خطها را با a, b, \dots و

۱- یادداشت از ح. غیور: تعریفی که در متن کتاب، برای قطب و قطبی انجام گرفته مخصوص دایره است. در صورتی که قطبی نقطه نسبت به دو خط متقاطع و نسبت به منحنیهای مقطع مخروطی نیز تعریف می شود که باز هم يك خط مستقیم است. قطبی نقطه نسبت به دو خط متقاطع خاصیت مهم چهارضلعی کامل را بیان می کند که در آن هر قطر بوسیله دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می شود (و در این کتاب کوچکترین اشاره ای به آن نشده است).

قطبهای آنها را به ترتیب با A ، B ، ... نشان می‌دهیم.

مطابق با شکل (۱۰۶ ، ب) نقطه A متمایز از O را در نظر می‌گیریم و قطبی آن را a و منعکس آن را با A' نشان می‌دهیم. نقطه دلخواه B را بر a در نظر می‌گیریم و OB همچنین عمود AB' را بر OB رسم می‌کنیم. دو مثلث OAB' و OBA' متشابهند و داریم:

$$OB \times OB' = OA \times OA' = k^2$$

بنابراین B' منعکس B و AB' یعنی b قطبی B می‌باشد. برعکس، هر خط b که بر A بگذرد (و بر OA واقع نباشد) بر یک خط که بر O می‌گذرد در B' عمود می‌باشد و OB' با a در B برخورد می‌کند که B قطب b می‌باشد. بنابراین قضیه زیر ثابت شده است:

قضیه ۱۰۶-۱ - قطبی هر نقطه واقع بر خط مفروض از قطب آن خط می‌گذرد.

اکنون فرض می‌کنیم که نقطه A و در نتیجه قطبی آن a ثابت بوده و B بر a تغییر مکان دهد، در هر حال قطبی B بر A می‌گذرد، پس می‌توان گفت کسب قطبی‌های مجموعه نقاط یک خط، مجموعه خطوطی است که در قطب آن خط متقاطعند. ویژگی گفته شده و بر اثر آن، خطها و نقطه‌ها به ترتیب به قطبها و قطبی‌های خود تبدیل می‌شوند، تبدیل قطبی معکوس نام دارد. اصل دگانه‌گی^۱ نیز که در پیش از آن نام بردیم چنین است:

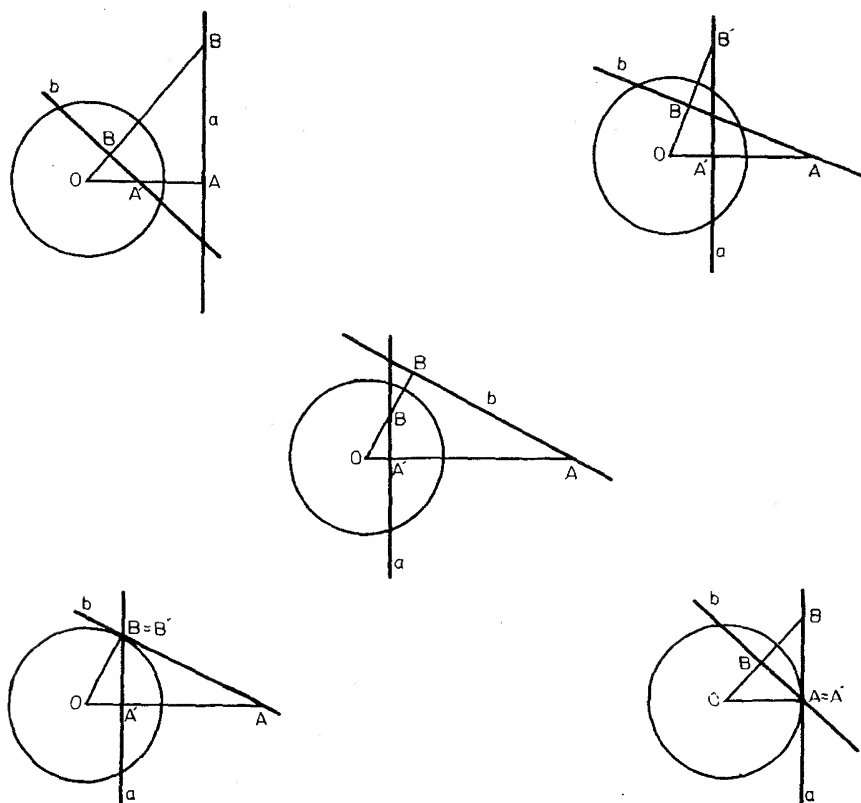
→

برای ارزشیابی دقیق تعریف قطب و قطبی که یکی از تبدیلات مهم هندسه بشمار می‌آید تعریف مشهور و کلاسیک آن را در زیر می‌آوریم:

«مکان هندسی مزدوج توافقی نقطه واقع در صفحه دایره مفروض نسبت به دو نقطه تقاطع قاطعی که از آن نقطه می‌گذرد با دایره، قطبی آن نقطه نسبت به دایره نامیده می‌شود.» به موجب این تعریف، قطبی نقطه بر حسب اینکه داخل یا خارج یا روی دایره باشد نسبت به دایره به ترتیب خط نامحدود، پاره خط و نقطه است و مرکز دایره قطبی ندارد. با قبول فرض نقطه‌های موهومی (اصل پونسله) و خط بینهایت صفحه (اصل دزارگ) و بویژه اینکه بطور استثنا قطبی هر نقطه از دایره را مماس مرسوم از آن نقطه بر دایره بدانیم، به موجب تعریف کلاسیک، قطبی نقطه نسبت به دایره در هر حال خط نامحدود است (در متن کتاب در تعریف صفحه تصویری به اصل خط بینهایت اشاره شده است).

امتیاز تعریف کلاسیک با پذیرفتن اصلها و آنچه ذکر شد بر تعریف متن در این است که آن تعریف برای منحنی درجه دوم، اعم از دو خط و یا مقطعهای مخروطی که بکار رود فقط کافی است که به جای دایره بنویسیم دو خط متقاطع یا بیضی، یا هذلولی یا سهمی. لازم به یادآوری است که در منحنیهای از درجه بالاتر از دو، قطبی نقطه از حالت خط مستقیم درمی‌آید و منحنی می‌شود.

۱- Principe de dualité.

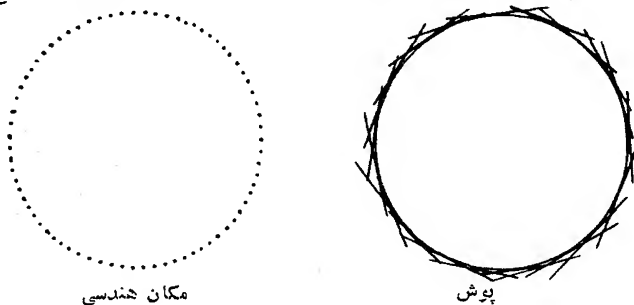


(شکل ۱.۶، ب)

به هر شکل مرکب از خطها و نقطه‌ها که در آن بعضی از نقطه‌ها بر بعضی از خطها واقعند، متقابلاً شکلی مرکب از نقطه‌ها و خطها نظیر است که در آن بعضی از خطها بر بعضی از نقطه‌ها می‌گذرند. مثلاً، به یک چهار گوشه $ABCD$ (که شامل چهار نقطه است که هیچ یک از سه‌تای آنها بر یک خط واقع نیستند و شامل شش خط می‌باشد که به ترتیب بر جفت‌های نقاط A, D و A, B و B, C و C, D و B, C و A, B می‌گذرند) متقابلاً یک چهار خطی $abcd$ نظیر می‌شود (که شامل چهار خط است بدون آنکه هیچ سه‌تای آنها متقارب باشند و شامل شش نقطه است که به ترتیب محل برخورد جفت‌های خطوط a, d و a, b و b, c و c, d می‌باشند).

دایره را می‌توان مکان هندسی نقاط یا اینکه پوش خطوط (مماسهای بر آن) در نظر گرفت، شکل (۱.۶، ب). هر مماس بر دایره وضع حدی قاطعی است که دو نقطه تقاطع

آن بادایره برهم منطبق گردند. متقابلاً هر نقطه از دایره را می توان وضع حصدی نقطه



(شکل ۱.۶، ب)

تقاطع دو مماس بر آن دانست که این دو مماس برهم منطبق گردند. بنا براین، تبدیل قطبی معکوس، مکان هندسی و پوش را نظیر هم قرار می دهد. هرگاه دایره ω را مکان هندسی نقاط بگیریم مبدل آن در تبدیل قطبی معکوس نسبت به ω ، همان دایره است اما بدعنوان پوش خطوط، و برعکس. همچنین اگر دایره ای به مرکز O و به شعاع r داشته باشیم، مبدل قطبی معکوس آن نسبت به دایره ω به مرکز O و به شعاع k ، دایره ای خواهد بود به مرکز O و به شعاع $\frac{k^2}{r}$.

فرهنگچه زیر مفاهیم متناظر را در تبدیل قطبی معکوس نشان می دهد و در بکار بردن آن در قضایا و ترسیمات کافی است که هر مفهوم از یک ستون را با مفهوم مقابل آن از ستون دیگر جانشین ساخت.

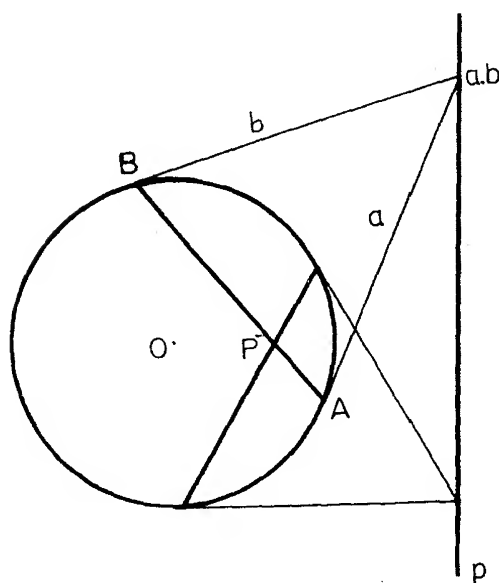
خط	نقطه
می گذرد بر	واقع است بر
نقطه تقاطع دو خط	خط واصل بین دو نقطه
واقع بر یک استقامت	متقارب
چهار خطی	چهار گوشه
قطبی	قطب
پوش	مکان هندسی
نقطه تماس	مماس

اگر دو نقطه چنان باشند که هر کدام از آنها بر قطبی دیگری واقع باشد آنها را نقطه های مزدوج و قطبی های آنها را خط های مزدوج می نامند. هرگاه a قطبی نقطه A بر نقطه B بگذرد، بنا به قضیه (۱.۶)، خط b قطبی B نیز بر A می گذرد، بنا براین

A و B نقطه‌های مزدوج و a و b خطهای مزدوج می‌باشند. با توجه به اینکه می‌توانیم نقطه را دایره به شعاع صفر بگیریم، قطبی هر نقطه مکان هندسی مزدوجهای آن نقطه، و قطب هر خط پوش مزدوجهای آن خط می‌باشد.

اگر خط a در نقطه A بر دایره ω مماس باشد، هر نقطه واقع بر a مزدوج نقطه A و در عین حال نقطه A مزدوج خودش نیز می‌باشد، همچنین در این حالت هر خط که بر A بگذرد مزدوج a و بخصوص خط a مزدوج خودش نیز می‌باشد.

قطب هر خط که بر دو نقطه A و B بگذرد (بدون آنکه بر O بگذرد) بر نقطه



(شکل ۱.۶، ت)

تلاقی a و b قطبی‌های A و B واقع است. در شکل (۱.۶، ت) دو نقطه A و B بر دایره ω واقعند پس a و b قطبی‌های آنها که به ترتیب در A و B بر ω مماسند در قطب خط AB ، که آن را با $a.b$ نشان داده‌ایم متقاطع می‌باشند. برعکس، هرگاه از نقطه خارج ω دو مماس a و b را بر آن رسم کنیم خطی که A و B نقطه‌های تماس را به هم وصل می‌کند قطبی نقطه مفروض می‌باشد.

هرگاه بر خط p دو نقطه انتخاب کنیم و قطبی‌های آنها را رسم کنیم در P قطب خط p برخورد می‌کنند. در عمل این دو نقطه را در

خارج ω انتخاب کرده از هر یک از آنها دو مماس بر دایره رسم و نقطه‌های تماس را به هم وصل می‌کنیم که از برخورد دو خط حاصل قطب خط مفروض مشخص می‌شود. برعکس هرگاه P داده شده باشد و از آن دو قاطع نسبت به دایره رسم کنیم و قطبهای این دو قاطع را به یکدیگر وصل کنیم قطبی نقطه P مشخص می‌گردد.

آنچه گفته شد در قضیه زیر خلاصه می‌شود:

قضیه ۱.۶-۲ - قطب هر خط که در A و B با دایره ω برخورد کند (بدون آنکه بر مرکز دایره بگذرد) نقطه برخورد مماسهایی است که در A و B بر دایره رسم می‌شوند. قطبی هر نقطه واقع در خارج دایره عبات است از خط واصل بین نقطه‌های تماس دو مماسی که از آن نقطه بر دایره رسم می‌شود. قطب هر خط (که بر مرکز دایره نگذرد) نقطه

تلاقی قطبیه‌ای دو نقطه ازان می‌باشد. قطبی هر نقطه (غیر از O) خط واحد بین قطبیه‌ای دوقاطع است که ازان نقطه بردایره رسم شوند.

نکته قابل توجه این است که با معلوم بودن دایره هادی ω و همه مماسهایی که می‌توان بر آن رسم کرد، ترسیمات مربوط به تبدیل قطبی معکوس فقط بدو وجود خود نقاط و خطوط بستگی دارد و فواصل بین آنها مطرح نیست. این نکته ازویژگیهای سرشتی هندسه تصویری است.

تمرینها

۱- دایره ω به مرکز O و يك نقطه A متمایز از O داده شده است. ثابت کنید که قطبی A نسبت به دایره ω همان محور اصلی دایره ω با دایره به قطر OA است.

۲- ثابت کنید که یکی از زاویه‌های بین قطبی‌های دو نقطه A و B بازایه AOB برابر است.

۳- ثابت کنید که در تبدیل قطبی معکوس، مبدل‌های رأس‌ها و ضلع‌های يك n ضلعی منتظم به مرکز O به ترتیب ضلع‌ها و رأس‌های يك n ضلعی منتظم می‌باشند.

۴- ثابت کنید که مبدل قطبی معکوس مستطیل به مرکز O يك لوزی است.

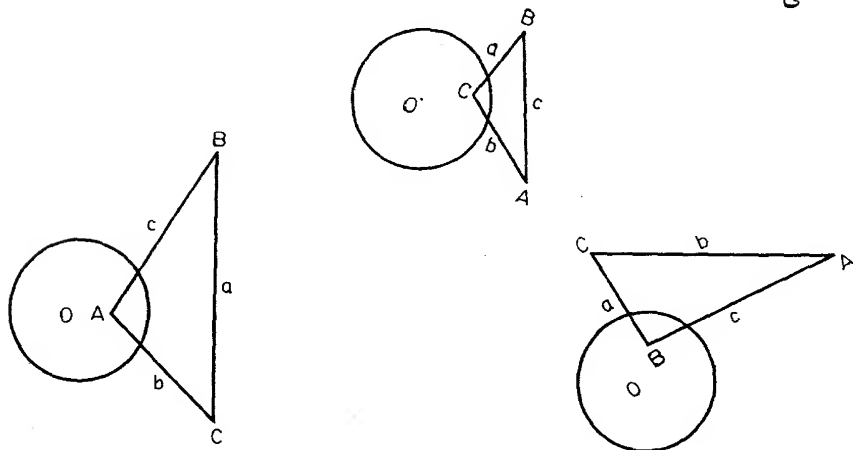
۲.۶- دایره مزدوج مثلث

در شکل (۱.۶، ب) که چهار نقطه A, B, A', B' از یکدیگر متمایزند، چنانچه نقطه برخورد a و b را با C نشان دهیم مثلث ABC دارای ویژگیهای زیر می‌باشد: هر رأس و ضلع روبروی آن قطب و قطبی یکدیگرند؛ هر دو رأس دلخواه آن نقطه‌های مزدوجند؛ هر دو ضلع دلخواه آن خط‌های مزدوجند. يك چنین مثلی را مثلث مزدوج می‌نامند و هر دو نقطه مزدوج که از یکدیگر متمایز باشند دو رأس از يك مثلث مزدوج خواهند بود.

در شکل (۲.۶، الف) سه حالت ممکن مثلث مزدوج ABC نشان داده شده است و ملاحظه می‌شود که در هر يك از سه حالت يك رأس در داخل دایره و دو رأس دیگر در خارج دایره واقعند و زاویه نظیر رأس واقع در داخل دایره منفرجه می‌باشد (زیرا مرکز ارتفاعی مثلث همان O مرکز دایره ω می‌باشد). برعکس، اگر مثلث ABC در يك زاویه منفرجه و O مرکز ارتفاعی آن و A', B', C' به ترتیب پاهای ارتفاع‌های نظیر رأس‌های A, B, C باشند، با توجه به رابطه (۴.۲) داریم:

$$\overline{OA} \times \overline{OA'} = \overline{OB} \times \overline{OB'} = \overline{OC} \times \overline{OC'} = k^2$$

بنابراین نسبت به دایره ω به مرکز O و به شعاع k مثلث مزبور مزدوج می باشد. این دایره را که برای مثلث منفرج الزاویه ABC منحصر به فرد است دایره مزدوج آن مثلث می نامند.



(شکل ۳.۶، ۱.۱۰)

از رابطه بالا نتیجه می شود که در انعکاس نسبت به دایره ω نقطه های A, B, C به ترتیب به نقطه های A', B', C' تبدیل می شوند، به عبارت دیگر، دایره محیطی مثلث ABC به دایره محیطی مثلث $A'B'C'$ تبدیل می شود. از اینرو قضیه زیر ثابت شده است:

قضیه ۳.۶-۱- برای هر مثلث منفرج الزاویه یک دایره مزدوج وجود دارد که نسبت به این دایره، دایره های محیطی و نه نقطه مثلث مزبور منعکس یکدیگرند.

به عبارت دیگر، دایره مزدوج مثلث یکی از دو دایره نیمساز دایره های محیطی و نه نقطه مثلث می باشد. نتیجه می شود که این سه دایره به یک دسته دو ایر تعلق دارند (که مرکزهای آنها بر خط اولر واقع است)؛ و بنابراین در مثلث منفرج الزاویه، دایره نه نقطه نه تنها بر نه نقطه بلکه بر یازده نقطه مهم می گذرد و دو نقطه دیگر آن عبارتند از نقطه های برخورد دایره محیطی با دایره مزدوج مثلث.

تمرین

زاویه دایره محیطی مثلث منفرج الزاویه با دایره مزدوج آن را به θ نشان می دهیم. ثابت کنید که:

$$\cos^2 \theta = -\cos A \cos B \cos C$$

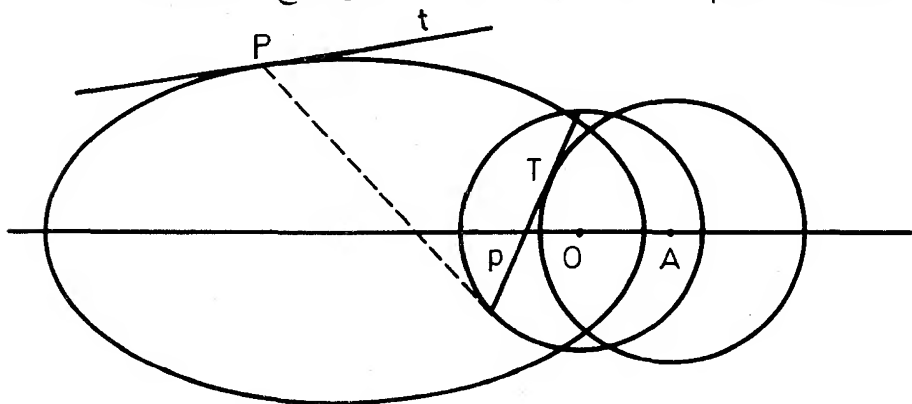
۳.۶- مقطعهای مخروطی

برای بررسی منحنیهای مقطع مخروطی که کلاً مخروطات نامیده می‌شود روشهای مختلف وجود دارد. در بندهای ۸.۳ و ۹.۳ نیز در این باره به اختصار اشاره‌ای شده است. یکی از روشهایی که بکار می‌رود این است که هر يك از منحنیهای مزبور را به عنوان مبدل قطبی معکوس دایره در نظر بگیریم؛ بدین ترتیب که نسبت بدایره ω به مرکز O و به شعاع k مبدل قطبی معکوس دایره α به مرکز A و به شعاع r را بررسی کنیم.^۱ شعاع k از دایره ω را ثابت می‌گیریم، زیرا اندازه آن فقط در ابعاد شکل حاصل تأثیر دارد و در نوع این شکل دخالتی ندارد. نوع منحنی مقطع مخروطی از روی رابطه

$$\varepsilon = \frac{OA}{r}$$

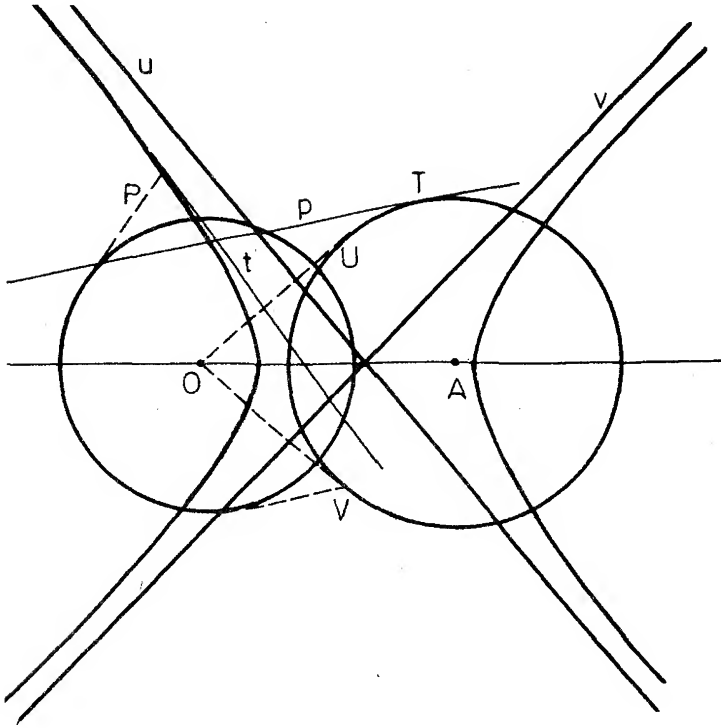
مشخص می‌شود. این نسبت را خروج از مرکز و نقطه O را يك كانون منحنی مقطع مخروطی می‌نامند.

وقتی منحنی مقطع مخروطی را به عنوان مبدل قطبی معکوس يك دایره α در نظر می‌گیریم به معنی آن است که آن منحنی مکان هندسی قطبهای مماسهای بر α و یا پوش قطبیه‌های نقطه‌های واقع بر α می‌باشد. اگر $\varepsilon < 1$ باشد، O داخل دایره α قرار داشته و روی هر نیم خط ابتدا از O نقطه‌ای از منحنی مقطع وجود خواهد داشت؛ در



(شکل ۳.۶، الف)

۱- یادداشت از ج. غیور: تعریف مقطعهای مخروطی به عنوان قطبی معکوس دایره (آنگونه که در متن کتاب بکار رفته است) این امتیاز را بر سایر تعریفها دارد که خواصی از دایره مانند قضیه پاسکال و قضیه بریانشن و امثال آنها را در منحنیهای مقطع مخروطی تضمین می‌دهد.



(شکل ۳.۶، ب)

ستارگان دنباله‌دار			سیارات	
۰/۸۵	Encke	انک	۰/۲۰۵۶	عطارد
۰/۷۶	Biela	بیلا	۰/۰۰۶۸	زهره
۰/۴۱	Holmes	هلم	۰/۰۱۶۷	زمین
۰/۴۷	Brooks	بروکس	۰/۰۹۳۴	مریخ
۰/۹۶۷	Halley	هالی	۰/۰۴۸۴	مشتری
۰/۹۹۶۳	Donati	دناتی	۰/۰۵۵۷	زحل
۰/۹۹۸۸	Coggia	کگزیا	۰/۰۴۷۲	اورانوس
۱/۰۰۰	Daniel	دانیل	۰/۰۰۸۶	نپتون
۱/۰۰۰	Morehouse	مورهوز	۰/۲۴۸۱	پلوتن

تمرینها

۱- شعاعهای دایره α و β تقریباً باهم برابرند و مرکزهای آنها بسیار نزدیک به هم می باشند و α داخل β واقع است. نقطه های A_1, A_2, A_3, \dots را روی α و نقطه های B_1, B_2, B_3, \dots را روی β چنان تعیین کنید که خطهای B_1B_2, B_2B_3, \dots در A_1, A_2, A_3, \dots بر α مماس باشند. خطهای A_1A_2, A_2A_3, \dots را به ترتیب با b_1, b_2, b_3, \dots و نقطه های برخورد مماسهای بر β در B_1, B_2, \dots را به ترتیب با C_1, C_2, C_3, \dots نشان می دهیم. ثابت کنید که اولاً خطهای b_1, b_2, \dots بر شکل قطبی معکوس β نسبت به α مماسند، ثانیاً نقطه های C_1, C_2, C_3, \dots بر شکل قطبی معکوس α نسبت به β واقعند.

۲- شکل قطبی معکوس دایره α نسبت به دایره ω يك محور تقارن دارد که همان خط المرکزین دو دایره است. آیا این شکل می تواند يك محور تقارن دیگر داشته باشد؟

۳- ثابت کنید که تسویرهای قائم کانون سهمی بر مماسهای مرسوم بر آن، روی يك خط راست واقعند.

۴- هر يك از میجانبهای هذلولی با خط OA (شکل ۳.۶، ب) زاویه θ می سازد ثابت کنید که:

$$\cos \theta = \frac{1}{e}$$

از این رابطه مقدار خروج از مرکز هذلولی متساوی القطرین را بدست آورید.

۵- اگر خروج از مرکز مدار يك ستاره دنباله دار $e \geq 1$ باشد، چه وضعی پیش می آید؟

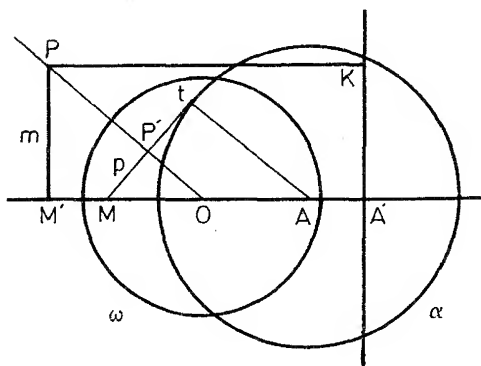
۴.۶- کانونها و خطهای هادی

منحنی مقطع مخروطی را شکل قطبی معکوس دایره α به مرکز A نسبت به دایره ω به مرکز O در نظر می گیریم؛ قطبی نقطه A نسبت به دایره ω را خط هادی نظیر کانون O منحنی و پاره خط واصل بین O و نقطه دلخواه P از منحنی را شعاع حامل نقطه P می نامیم. اکنون یکی از ویژگیهای بسیار مهم و جالب مقطع مخروطی را به صورت قضیه زیر بیان می کنیم که نخستین بار در قرن چهارم میلادی توسط پاپوس اسکندانی، و شاید هم ششصد سال زودتر توسط اقلیدس اثبات شده است.

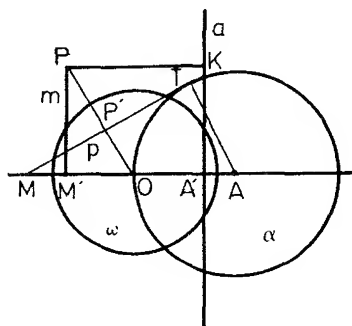
قضیه ۴.۶-۱- منحنی مقطع مخروطی با خروج از مرکز e مفروض است. اگر O يك کانون و a خط هادی نظیر این کانون و P نقطه دلخواهی از منحنی باشد،

طول OP ، شعاع حامل نقطه P ، برابر است با حاصل ضرب ε در فاصله نقطه P از خط a .

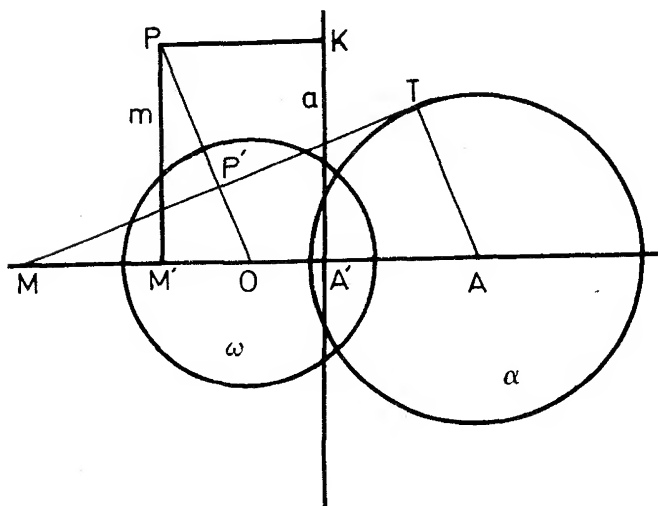
درشکلهای (۴.۶، الف، ب، پ)، P نقطه‌ای از منحنی مقطع مخروطی است و



(شکل ۴.۶ ب)



(شکل ۴.۶، الف)



(شکل ۴.۶، پ)

p قطبی P (نسبت به دایره ω) است که در T بر α مماس می باشد و با OA در M برخورد کرده است. خط p با OP در P' برخورد می کند که منعکس P می باشد. همچنین خط هادی a (نظیر کانون O) با OA در A' برخورد می کند که منعکس نقطه A است و بالاخره خط m قطبی نقطه M نیز با OA در M' منعکس نقطه M تلاقی می کند. از P عمود PK را بر خط a رسم می کنیم و می خواهیم ثابت کنیم که: $OP = \epsilon \cdot PK$. برای آنکه اثبات در حالت های مختلف را یکجا انجام دهیم خط حامل OA را جهت دار می گیریم و جهت مثبت آن را همان جهت از O به A اختیار می کنیم. با توجه به اینکه k شعاع دایره ω و r شعاع دایره α است می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PK}}{\overline{OP}} &= \frac{\overline{OA'} - \overline{OM'}}{\overline{OP}} = \frac{k}{\overline{OP}} \left(\frac{\overline{OA'}}{k} - \frac{\overline{OM'}}{k} \right) \\ &= \frac{\overline{OP'}}{k} \left(\frac{k}{\overline{OA}} - \frac{k}{\overline{OM}} \right) = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OM}} \left(\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} - 1 \right) \\ &= \frac{\overline{AT}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}} = \frac{r}{\overline{OA}} = \frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

هر گاه به ترتیب عکس عمل کنیم قضیه نیز ثابت می شود. بنا براین:

قضیه ۲، ۴، ۶- نقطه O و خط α که بر O نمی گذرد و مقدار مثبت ϵ داده شده است، مکان هندسی نقاطی که فاصله آنها از O برابر است با حاصل ضرب ϵ در فاصله آنها از α ، یک مقطع مخروطی است.

به سادگی معلوم می شود که هر گاه دایره ω به مرکز O مماس بر α انتخاب شود و

A نقطه تماس باشد، دایره α به مرکز A و به شعاع $\frac{OA}{\epsilon}$ خواهد بود.

تمرینها

۱- در صفحه محاورهای مختصات دکارتی نقطه متغیر P را در نظر می گیریم که فاصله آن از مبدأ مختصات برابر باشد با حاصل ضرب ϵ در فاصله آن از خط به معادله $\frac{1}{\epsilon}$. معادله مکان هندسی نقطه P را بدست آورید.

۲- در تمرین ۱ مقدار ϵ را مخالف يك می گیریم، در این صورت مکان هندسی نقطه P بسا محور xها در دو نقطه برخورد می کند. محاورهای مختصات را انتقال

می‌دهیم تا مبدأ جدید بوسط دو نقطه مزبور واقع گردد و فرض می‌کنیم که:

$$a = l(1 - \varepsilon^2) \text{ و } b = |la|$$

معادله مکان را به ساده‌ترین صورت بدست آورید که محورهای تقارن آن به‌سادگی مشخص باشند.

۵.۶- صفحه تصویری

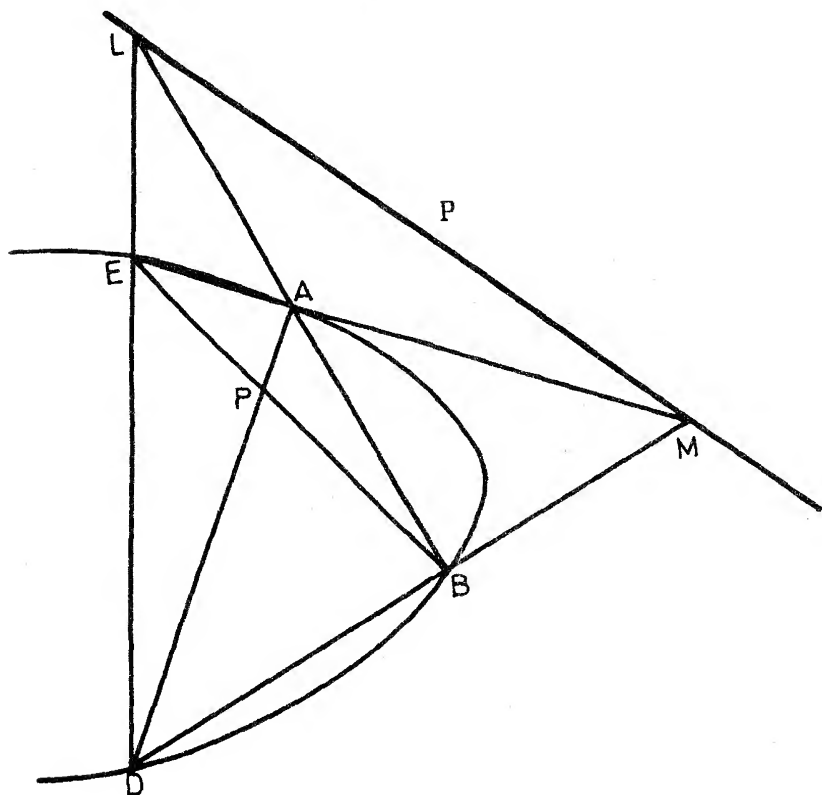
در تبدیل قطبی معکوس اگر نقطه O و خطهای گذرنده بر آن را کنار بگذاریم، آنگاه به‌طور دقیق می‌توانیم بگوییم که هر نقطه به يك خط و هر خط به يك نقطه تبدیل می‌شود. در مورد انعکاس نیز يك چنین استثنایی وجود داشت که برای رفع آن نقطه بینهایت را پذیرفتیم و صفحه انعکاس را بدست آوردیم. برای آنکه در تبدیل قطبی معکوس نیز استثناهایی وجود نداشته باشد خط بینهایت l منحصر به فرد را می‌پذیریم که نقطه O باشد و در نتیجه نقطه‌های آن (نقطه‌های بینهایت) قطبهای خطهایی خواهند بود که بر O می‌گذرند. با پذیرفتن این عناصر جدید، یعنی خط بینهایت و نقطه‌های بینهایت، می‌توان بطور قاطع حکم کرد که هر خط دلخواه a يك قطب A دارد که قطبهای همه نقاط واقع بر a بر A می‌گذرند. هرگاه a بر O بگذرد قطبهای نقاط آن که همه بر a عمودند يك دسته خطوط متوازی را تشکیل می‌دهند و در عین حال قطب a که نقطه بینهایت است نقطه مشترك همه این دسته خطوط می‌باشد. صفحه شامل خط بینهایت را صفحه تصویری می‌نامیم و در این صفحه بیان زیر بدون استثنا صحیح می‌باشد: هر دو خط دلخواه و متمایز a و b يك نقطه مشترك دارند.

با توجه به تبدیل قطبی معکوس، هر قضیه مربوط به خطها و نقطه‌ها را که در نظر بگیریم می‌توانیم نظیر آن قضیه‌ای مربوط به نقطه‌ها و خطها بیان کنیم که این نقطه‌ها و خطها به ترتیب قطبها و قطبهای خطها و نقطه‌های قضیه اول باشند. برای مثال، شش ضلعی محیطی دایره ω را در نظر می‌گیریم، نقطه‌های تماس ضلعهای این شش ضلعی با دایره شش ضلعی محاطی تشکیل می‌دهند و این دوشش ضلعی در تبدیل قطبی معکوس نسبت به ω مبدل یکدیگرند. بنابراین قضیه پاسکال (بند ۸.۳) و قضیه براناشن (بند ۹.۳) نظیر یکدیگرند و می‌توان با استفاده از تبدیل قطبی معکوس هر کدام را از دیگری نتیجه گرفت. در حالت کلی که دایره ω غیر از دایره محیطی یا محاطی شش ضلعی انتخاب شود، هر يك از دو قضیه مزبور را که در مورد دایره در نظر بگیریم، به صورت قضیه دیگری در مورد يك منحنی مقطع مخروطی بیان خواهد شد که این منحنی مبدل قطبی معکوس آن دایره خواهد بود.

اکنون می‌خواهیم قضیه (۲، ۱.۶) را با کنار گذاشتن استثنای آن (که در داخل

برانتزها قرار داشتند) به صورت کلی و ساده بیان کنیم. قضیه را برای دایره دلخواه α در نظر می گیریم و اگر α' منحنی مقطع مخروطی باشد که نسبت به دایره ω مبدل قطبی معکوس دایره α است، در این صورت قضیه را برای α' نیز نتیجه خواهیم گرفت. به این ترتیب ترسیماتی که برای قطبها و قطبیها نسبت به α خواهیم داشت به ترسیمات مربوط به قطبیها و قطبها نسبت به α' تبدیل می شوند. از اینرو می توانیم قطب و قطبی نسبت به دایره را به صورت کلی قطب و قطبی نسبت به يك مقطع مخروطی تعمیم دهیم. قضیه (۲، ۱.۶) با کنار گذاشتن استثنای آن شامل چهار بخش می باشد که هر يك از آنها متقابلا نظیر بقید است؛ هر گاه به جای ω يك منحنی مقطع مخروطی در نظر بگیریم باز هم قضیه درست خواهد بود.

در شکل (۸.۳، ب) خط LM از N نقطه برخورد b و c و همچنین نقطه برخورد d و a می گذرد. با توجه به این نکته و با در نظر گرفتن بخش آخر قضیه (۲، ۱.۶) و تعمیم آن، روش ساده ترسیم قطبی يك نقطه دلخواه P نسبت به يك منحنی مقطع مخروطی به شرح زیر و مطابق با نمونه شکل (۵.۶، الف) نتیجه می شود:



(شکل ۵.۶، الف)

قضیه ۱-۵۰۶ - منحنی مقطع مخروطی و نقطه P غیر واقع بر آن مفروض است. هرگاه از P دو قاطع AD و BE رسم شود و L نقطه برخورد AB و DE به M نقطه برخورد AE و BD وصل شود، خط حاصل قطبی نقطه P نسبت به منحنی مزبور می باشد.

با توجه به اینکه اگر قطب و قطبی نسبت به يك دایره α را در نظر بگیریم و آن را نسبت به دایره هادی ω تبدیل قطبی معکوس کنیم، قطبی و قطب نسبت به مقطع مخروطی α' را بدست خواهیم آورد. درشکلهای (۳۰۶، الف، ب، پ) نقطه A و خط بینهایت I_∞ نسبت به دایره α قطب و قطبی می باشند، هرگاه α' مبدل قطبی معکوس α نسبت به ω باشد، خط a و نقطه O نسبت به α' قطبی و قطب خواهند بود. بنا بر این داریم:

قضیه ۲-۵۰۶ - در هر منحنی مقطع مخروطی، خط هادی نظیر يك كانون، قطبی آن كانون نسبت به منحنی می باشد.

تمرینها

۱- قضیه دژاگ (۱، ۶۰۳) را که به هندسه تصویری برگردانیم به چه صورت بیان خواهد شد؟

۲- تمرین ۱ را درباره قضیه پاپوس (۱، ۵۰۳) نیز انجام دهید.

۳- یکی از ضلعهای يك مثلث مزدوج نسبت به يك دایره خط بینهایت است. دو ضلع دیگر این مثلث چگونه اند؟

۴- ثابت کنید که منحنی مقطع مخروطی بیضی، سهمی یا هذلولی است بر حسب آنکه خط بینهایت در خارج آن واقع باشد، بر آن مماس باشد یا آن را قطع کند.

۵- ثابت کنید که مجانبهای هذلولی در نقاط برخورد منحنی با خط بینهایت بر آن مماسند.

۶- ثابت کنید از هر نقطه خط هادی سهمی دو مماس عمود بر هم می توان بر آن رسم کرد.

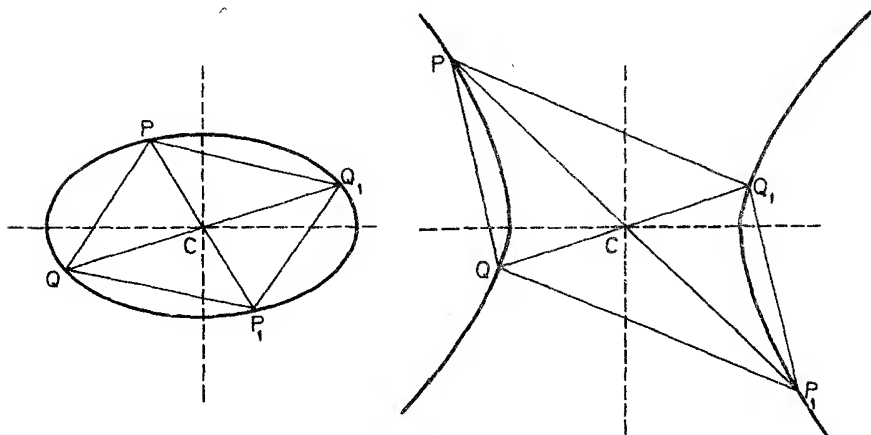
۷- هرگاه چهار رأس يك چهار گوشه کامل بر يك منحنی مقطع مخروطی واقع باشد، ثابت کنید که نقاط برخورد سه جفت ضلعهای روبروی آن سه رأس يك مثلث مزدوج می باشند.

۶-۶- مقطعهای مخروطی مرکزدار

در ترسیم منحنیهای بیضی و هذلولی و ملاحظه وضع عناصرهای هر کدام از آنها

نسبت به هم، مثلاً وضع متشابه دورأس کانونی بیضی یا وضع متشابه دوشاخه هذلولی، چنین بنظر می آید که این منحنیها دارای تقارن می باشند. از اینرو طبیعی خواهد بود که به بررسی ویژگیهای تقارنی در این منحنیها پردازیم. بحث زیرو وجود تقارن کامل را در این منحنیها آشکار می سازد.

با توجه به قضیه (۱، ۵.۶) معلوم می شود که اگر C نقطه ای غیر واقع بر مقطع مخروطی و PP_1 و QQ_1 دو قاطع دلخواه گذرنده بر آن باشند، قطبی نقطه C نسبت به مقطع مخروطی خطی است که بر نقطه برخورد دو خط PQ و P_1Q_1 و همچنین نقطه برخورد دو خط PQ_1 و P_1Q می گذرد. هرگاه قطبی نقطه C خط بینهایت باشد، مانند شکل (۶.۶، الف)، در این صورت چهار گوشه محاطی PQP_1Q_1 متوازی الاضلاع



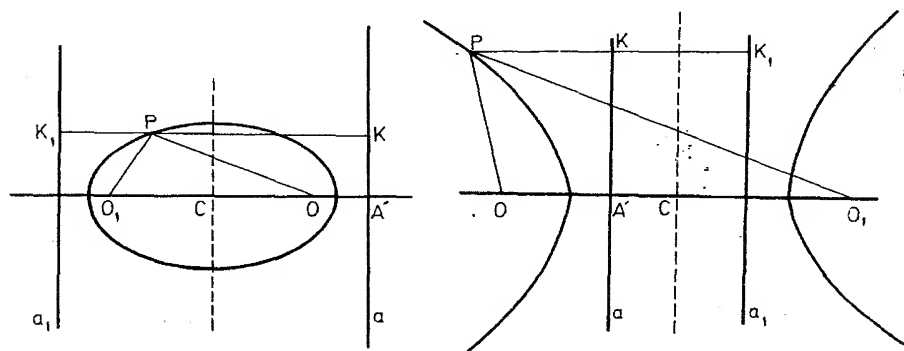
(شکل ۶.۶، الف)

می باشد؛ نقطه C که بر مقطع مخروطی واقع نیست، قطبی آن (یعنی خط بینهایت، l_∞) برای این مقطع مخروطی مماس نمی باشد و در نتیجه این منحنی سهمی نخواهد بود و بعلاوه، نقطه C که قطب خط بینهایت است در وسط هر یک از یاره خطهای PP_1 و QQ_1 قرار دارد و بنابراین PQP_1Q_1 متوازی الاضلاع است. قاطعهای PP_1 و QQ_1 به دلخواه انتخاب شده اند، پس C مرکز تقارن منحنی است و آن را مرکز مقطع مخروطی (بیضی و هذلولی) می نامند. از اینرو منحنیهای بیضی و هذلولی مقطعهای مخروطی مرکزداد نامیده می شوند.

از آنچه گذشت قضیه زیر ثابت شده است:

قضیه ۱۰۶.۶- مقطع مخروطی مرکزدار نسبت به مرکزش متقارن است، یعنی با تبدیل نیمدور حول مرکزش به خودش تبدیل می‌شود.

هرگاه O کانون و a خط هادی نظیر آن در يك مقطع مخروطی مرکزدار باشد (بند ۴.۶)، قرینه‌های آنها نسبت به C یعنی نقطه O_1 و خط a_1 نیز به ترتیب کانون و خط هادی نظیر آن در آن مقطع مخروطی خواهد بود، شکل (۶.۶، ب). همچنین در

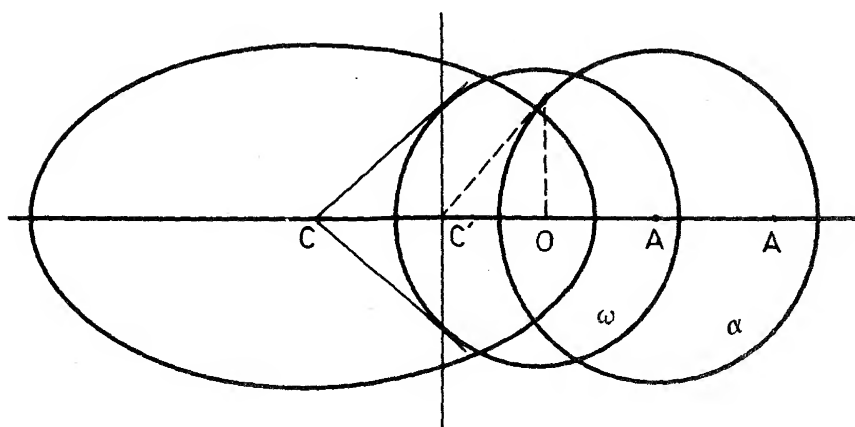


(شکل ۶.۶، ب)

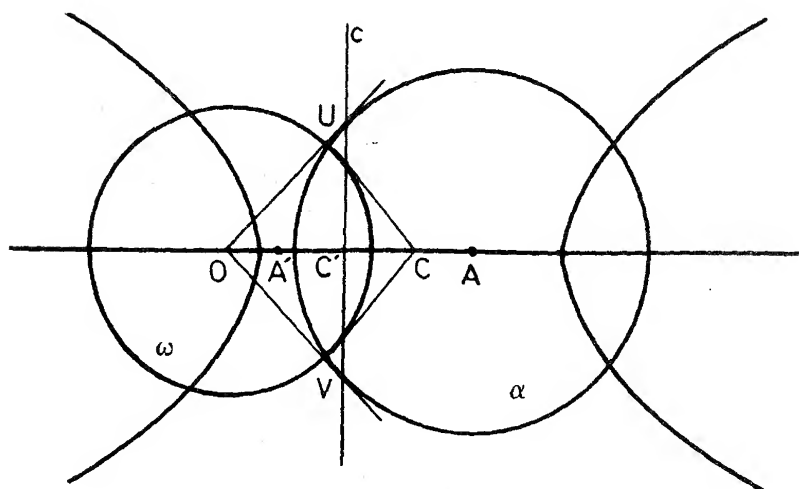
تبدیل نیمدور به مرکز C دایره‌های ω و α از بند (۳.۶) به دایره‌های جدید ω_1 و α_1 تبدیل می‌شوند به گونه‌ای که قطبی متقابل α_1 نسبت به ω_1 باز همان مقطع مخروطی به مرکز C خواهد بود.

صرف نظر از حالتی که O و A بر هم منطبق باشند، خط OA محور تقارن هر مقطع مخروطی است. بدیهی است که در مقطعهای مخروطی مرکزدار، مرکز آنها برای محور تقارن قرار دارد. بنابراین تبدیل نیمدور به مرکز C را می‌توان ترکیب دو تقارن محوری دانست که محورهای آنها در C بر هم عمودند؛ یکی از این محورهای تقارن خط OA است، پس در مقطعهای مخروطی مرکزدار خطی که در C عمود بر OA است نیز محور تقارن منحنی می‌باشد. می‌توان گفت که مقطع مخروطی مرکزدار دارای همان نوع تقارنهایی است که لوزی یا مستطیل دارا می‌باشد.

قطبی C را نسبت به دایره ω با C نشان می‌دهیم که در شکلهای (۶.۶، پ) و (۶.۶، ت) نموده شده است. نقطه C و خط بینهایت، l_∞ نسبت به دایره α' قطب و قطبی یکدیگرند، خط C و نقطه O نیز باید قطبی و قطب یکدیگر نسبت به دایره α



(شکل ۶.۶ ، ب)



(شکل ۶.۶ ، ت)

باشند. پس نقطه C قطب خط c است نسبت به دایره ω در حالی که همین خط c قطبی نقطه O نسبت به دایره α است. اگر نقطه C' برخورد c با OA باشد، نقطه C' از یک طرف منعکس C نسبت به ω و از طرف دیگر منعکس O نسبت به α است، یعنی داریم:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC'} = k^2 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'}$$

$$r^2 = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{C'A}$$

بنابر این:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA} - \overline{C'A}} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OA}^2 - \overline{OA} \cdot \overline{C'A}}$$

$$= \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OA}^2 - r^2} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}$$

بر حسب آنکه $\varepsilon > 1$ یا $\varepsilon < 1$ باشد نسبت بالا مثبت یا منفی خواهد بود. بنابراین در بیضی مرکز C و خط هادی a در دو طرف O قرار دارند در حالی که در هذلولی در یک طرف O واقعند، همچنانکه در شکل‌های (۶.۶، ب) نموده شده است. به عبارت دیگر در بیضی دو کانون در درون منحنی واقعند و منحنی به تمامی بین دو خط هادی قرار دارد. اما در هذلولی دو خط هادی در بخشی از صفحه واقعند که بین دو شاخه هذلولی واقع شده است.

در مکانیک ثابت می‌شود که اگر از مقاومت هوا صرف نظر گردد مسیری که گلوله از دهانه توپ پرتاب گردد کمانی از سهمی خواهد بود که تعیین کانون آن به سادگی میسر می‌باشد. از آنجا که می‌توان برای حداقل چند ثانیه گلوله را همچون یک سیاره کوچک تصور کرد، در این صورت مسیر آن که بنظر می‌رسد سهمی است در واقع یک بیضی بسیار کشیده خواهد بود که خروج از مرکز آن بسیار نزدیک به یک می‌باشد. در این صورت کانون دیگر این بیضی در کجا قرار دارد؟ ... در مرکز زمین!

تمرینها

- ۱- نقطه P بر بیضی به کانونهای O و O_1 تغییر مکان می‌دهد، ثابت کنید که مجموع شعاعهای حامل آن یعنی $OP + O_1P$ مقدار ثابت است (شکل ۶.۶، ب).
- ۲- نقطه P بر هذلولی به کانونهای O و O_1 تغییر مکان می‌دهد، ثابت کنید که تفاضل شعاعهای حامل آن یعنی $|OP - O_1P|$ مقدار ثابت است.
- ۳- ثابت کنید که در مقطع مخروطی مرکزدار تصویرهای کانونها بر خطهای مماس بر منحنی روی دایره ثابتی (دایره اصلی) واقعند.

۷.۶- تصویر جسم نمایی (رسم الجسمی) - تصویر مرکزی

در بند (۳.۵) ملاحظه کردیم که تنها نقطه O مرکز دایره انعکاس ω دارای منعکس نمی‌باشد. برای از بین بردن این نارسائی، یعنی برای آنکه انعکاس یک تبدیل نقطه به نقطه برای کل نقاط صفحه باشد، با افزودن نقطه بینهایت (که مبدل انعکاسی نقطه O

است) به صفحه اقلیدسی صفحه انعکاسی را بدست آوردیم. به عبارت دیگر، صفحه اقلیدسی را به صفحه انعکاسی گسترش دادیم.

همچنین چنانکه در بند (۱۰۶) دیدیم، در صفحه اقلیدسی تنها نقطه‌ای که قطبی ندارد نقطه O مرکز دایره هادی است. برای از بین بردن این نارسایی، یعنی برای آنکه تبدیل قطبی معکوس نیز همه نقطه‌های صفحه را دربر گیرد، خط بینهایت را به صفحه اقلیدسی اضافه کردیم و صفحه تصویری را بدست آوردیم. در این حالت هم صفحه اقلیدسی را به صفحه تصویری گسترش دادیم.

بنابراین دو روش متفاوت اما متشابه وجود دارد که بدان وسیله می‌توان صفحه اقلیدسی را گسترش داد، در اینجا نکته مهمی وجود دارد که خیلی کمتر از آنچه لازم بوده به آن توجه شده است. هرگاه استدلال رانه تنها در صفحه بلکه در فضا تعمیم دهیم و دو گونه بسیار ساده گسترش کره روی صفحه را مورد مقایسه قرار دهیم می‌توانیم به توجیه دقیقتر دو روش گفته شده دست یابیم.

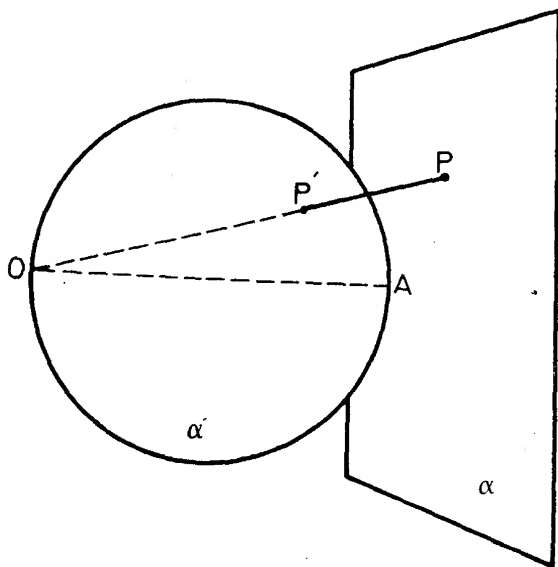
نخست تعریفی را که درباره انعکاس نسبت به یک دایره در بند (۳۰۵) بکار بردیم در مورد یک کره تعمیم می‌دهیم: کره به مرکز O و به شعاع k و نقطه P متمایز از نقطه O را در نظر می‌گیریم؛ بنا به تعریف، نقطه P' را که بر نیم خط OP قرار داشته و فاصله آن از O طبق رابطه زیر مشخص می‌شود منعکس نقطه P می‌نامیم.

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = k^2$$

هرگاه صفحه شکل (۳۰۵، ب) را متعلق به فضای سه بعدی بدانیم و آن را حول خط OA دوران دهیم و در ضمن صفحه را کره به شعاع بینهایت در نظر بگیریم، در این صورت به سادگی می‌توانیم نتیجه بگیریم که انعکاس هر کره را به کره دیگر تبدیل می‌کند. بویژه اگر α صفحه‌ای باشد که در A بر کره انعکاس ω مماس باشد، منعکس آن کره α' به قطر OA خواهد بود. از اینرو می‌توانیم با واسطه ω بین نقاط صفحه α و نقاط کره α' تناظری برقرار سازیم: اگر P نقطه‌ای از صفحه α باشد نقطه P' نظیر آن عبارت است از نقطه تلاقی OP با کره α' (شکل ۷۰۶، الف). برعکس، نظیر هر نقطه P' از کره α' ، به استثنای O ، نقطه P از صفحه α وجود دارد که همان نقطه برخورد OP' با α است. در اینجا هم استثنایی وجود دارد که برای برطرف کردن آن، صفحه α را با افزودن یک نقطه بینهایت به آن به صفحه انعکاسی تبدیل می‌کنیم که این یک نقطه وضع P خواهد بود وقتی که P' روی O واقع باشد.

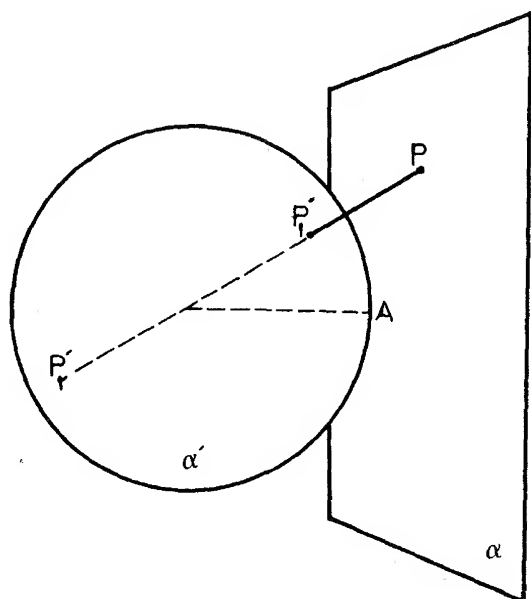
این روش نمایش کره α' روی صفحه α به تصویر جسم‌نمایی موسوم است. با ملاحظه آنکه این گونه تصویر شیوه ویژه‌ای از انعکاس است، به سادگی نتیجه می‌گیریم

که تصویر هر دایره باز هم یک دایره می باشد. منعکس هر کره یک کره (یا یک صفحه) است و هر دایره فصل مشترک دو کره است؛ بنابراین منعکس هر دایره (به هر وضعی که در فضا واقع باشد و حتی اگر بر کره α' قرار داشته باشد) یک دایره می باشد.



(شکل ۷.۶، الف)

برای نمایش کره α' روی صفحه α مماس بر آن، روش دیگری وجود دارد که تصویر مرکزی نامیده می شود. در این روش نقطه دید را مرکز کره α' اختیار می کنند که وسط OA است. هر صفحه ای که برای این نقطه بگذرد کره α' را در یک دایره عظیمه و صفحه α را در یک خط قطع می کند؛ بنابراین هر خط از صفحه α بایک دایره عظیمه از کره α' معین می شود، همچنین هر نقطه از α بایک جفت نقطه های واقع در دایره قطر از کره α' مشخص می گردد، چنانکه در شکل (ب، ۷.۶) ملاحظه می شود دو نقطه P' و P'' از کره α' نظیر نقطه P از صفحه α می باشند. برعکس، هر دایره عظیمه از کره α' را، به استثنای دایره عظیمه ای که صفحه آن با α موازی است، که در نظر بگیریم نظیر آن در صفحه α خطی وجود دارد که محل برخورد صفحه آن دایره عظیمه با صفحه α می باشد. در اینجا هم برای از بین بردن استثنا با افزودن یک خط بینهایت به صفحه α آن را به صورت صفحه تصویری درمی آوریم که این خط بینهایت نظیر دایره عظیمه ای از کره α' است که صفحه آن با صفحه α موازی است. هر یک از نقطه های این خط - نقطه های بینهایت - نظیر یک جفت نقطه واقع در دایره قطر از دایره عظیمه مزبور می باشند. هر دو خط از صفحه



(شکل ۷.۶، ب)

يك نقطه مشترك دارند و مؤكد آن است كه هر دو دایره عظیمه واقع بر كره در دو نقطه واقع در دوسریك قطر مشترك خواهند بود - در واقع هر دو صفحه كه بر مركز كره بگذرند در يك خط متقاطع می باشند.

با توجه به آنچه كه گفته شد نتیجه می گیریم كه هر يك از نقاط صفحه تصویری (با در نظر گرفتن نقطه بینهایت) تصویر يك جفت نقطه واقع در دوسر قطری از كره است ؛ از اینرو با در نظر گرفتن كره به صورت مجموعه ای از جفت نقاط می توان آن را به صفحه تصویری تبدیل كرد كه در این تبدیل هر جفت نقطه از كره به يك نقطه از صفحه تصویری تبدیل می شود.

از نظر عملی می توان روش تبدیل كره به صفحه را در رسم نقشه جغرافیائی كره زمین روی يك صفحه بكار برد. در این باره هیچيك از روشهای تصویر جسم نمایی و تصویر مرکزی مطلوب واقعی نخواهد بود ، اما هر يك از آنها دارای امتیازهایی است. روش نخست زاویه های بین هر دو نیم خط به مبدأ مشترك را محفوظ می دارد و در نتیجه به عنوان مثال ، دوره های جزیره های كوچك تغییر شكل نمی دهند. با استفاده از روش دوم می توان كو تا هترین راه بین دو نقطه از كره را به صورت خط مستقیم نمایش داد.

قبلا دیده ایم (در قضیه ۴.۵ ، ۱) كه انعكاس نسبتهای ناهمساز را محفوظ می دارد.

این ویژگی در تبدیل قطبی معکوس فقط در مورد نقطه‌های واقع بر يك خط وجود دارد. به عبارت دقیقتر، نسبت ناهمساز چهار نقطه واقع بر يك خط P برابر است با نسبت ناهمساز چهار نقطه‌ای که از برخورد قطبهای نقاط مزبور با هر خط غیر گذرنده بر p ، قطب خط P بدست می‌آیند. اثبات این ویژگی طولانی است و متأسفانه در اینجا مجال آن وجود ندارد.

خواننده دقیق که مفاهیم گذشته را درک کرده باشد توانایی آن را خواهد داشت که بیان اصولی هندسه تصویری را حدس بزند: این بار قضیه‌های دژادگ، پاچوس و پاسکال را از نقطه نظر کاملاً متفاوتی درخواهد یافت، اما باز هم در آنها دوستان قدیمی را باز خواهد شناخت.

تمرینها

- ۱- ثابت کنید که تصویر جسم‌نمایی زاویه‌ها را محفوظ می‌دارد.
- ۲- ثابت کنید که در تصویر جسم‌نمایی هر دایره عظیمه از کره α' به يك دایره (یا يك خط) از صفحه α تبدیل می‌شود که با دایره معینی در دو نقطه واقع در دوسر يك قطر متقاطع می‌باشند.
- ۳- دو نقطه P_1' و P_2' واقع در دوسر قطری متغیر از کره α' را در نظر می‌گیریم و تصویرهای جسم‌نمایی آنها را روی صفحه α با P_1 و P_2 نشان می‌دهیم. نوع تبدیلی را بیابید که به وسیله آن بتوان در صفحه α از P_1 به P_2 رسید.
- ۴- با استفاده از تصویر جسم‌نمایی، شش دایره مورد نظر تمرین ۳ از بند (۸.۵) را از روی شش دایره محاط در شش وجه يك مکعب بدست آورید.

راهنمایی و حل تمرینها

پاسخش به مغزم چنان راه می‌یابد که گوئی آب از
غریب می‌گذرد!

C.L.Dodgson

بند ۱.۱

۱- ارتفاع وارد از رأس A روی ضلع BC دوباره خط به طولهای $b\cos C$ و $c\cos B$ جدا می‌کند. بر حسب آنکه هر دو زاویه B و C حاده یا اینکه یکی از آنها منفرجه باشد، این دو مقدار را باهم جمع یا ازهم کم کنید.

۲- مقادیر $\sin A$ ، $\sin B$ و $\sin C$ را به صورت $\frac{a}{2R}$ ، $\frac{b}{2R}$ و $\frac{c}{2R}$ نوشته و

ساده کنید.

۳- دو رابطه زیر را بکار ببرید:

$$S(ABC) = \frac{1}{2} ab \sin C \quad \text{و} \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

۴- رابطه‌های زیر را ضرب کرده و ساده کنید:

$$c = 2p \sin B = \frac{pb}{R} \quad \text{و} \quad b = 2q \sin C = \frac{qc}{R}$$

بند ۲.۱

۱- با توجه به $AZ = ZB$ و $CY = YA$ ، $BX = XC$ از قضیه سوا

استفاده کنید.

۲- با استفاده از رابطه‌های $XC = b \cos C$ ، $BX = c \cos B$ و غیره قضیهٔ سوارا بکار ببرید.

۳- هرگاه O نقطهٔ برخورد BB' با CC' و A_1 نقطهٔ برخورد OA با $A'B'$ باشد، مثلثهای ABC و $A'B'C'$ متشابهند و می‌توان نوشت:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A_1B'}{AB}$$

که پیامد آن همانی بودن A_1 با A' است.

۴- زاویه‌های CXA و AXB مکمل یکدیگرند و مجموع عبارتهای کسینوسهای آنها برابر با صفر است.

بند ۳.۱

۱- هرگاه يك زاویه از مثلث منفرجه باشد، آن مثلث در کمانی کوچکتر از نیم‌دایره از دایرهٔ محیطی محاط است و دوارتفاع مثلث ضلع روبرو به زاویهٔ منفرجه را در امتداد آن تلاقی می‌کنند.

۲- شکل (۳.۱، ب) را در نظر گرفته و پاره خط $A'D$ را موازی و مساوی با BB' رسم کنید که $A'CDB'$ متوازی‌الاضلاع بوده و E مرکز آن وسط CB' است. در این صورت ضلعهای مثلث DAA' با میانه‌های مثلث ABC مساوی و موازیند و نتیجه می‌شود:

$$\frac{S(ABC)}{S(DAA')} = \frac{S(CAA')}{S(EAA')} = \frac{CA}{EA} = \frac{4}{3}$$

۳- اگر G نقطهٔ برخورد دو میانهٔ باهم برابر BB' و CC' باشد، چون BG و CG به ترتیب با دوسوم BB' و CC' برابرند مثلث GBC متساوی‌الساقین است و دوزاویهٔ $C'CB$ و $B'BC$ باهم برابرند. دو مثلث $C'CB$ و $B'BC$ در حالت تساوی دوضلع و زاویهٔ بین با هم برابرند و نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ ACB و ABC باهم برابرند.

۴- اگر BE و CF دو ارتفاع باهم برابر باشند، مساحت مثلث برابر است با نصف هریک از حاصل‌ضربهای $b \cdot BE$ و $c \cdot CF$. و بنابراین $b = c$.

۵- با توجه به شکل (۳.۱، ت) داریم:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b} \text{ و } \dots$$

۶- با بکار بردن قضیهٔ استوارت (تمرین ۴ از بند ۲.۱) خواهیم داشت:

$$a\left(p^2 + \frac{1}{4}a^2\right) = \frac{1}{2}a(b^2 + c^2)$$

$$p = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

۷- قضیه استوارت را بکار ببرید با توجه به اینکه داریم:

$$m = kc \text{ و } n = kb \text{ و } k = \frac{a}{b+c}$$

$$۸- پاسخ: \frac{۱۲\sqrt{2}}{7}$$

۹- هرگاه در شکلهای (۱.۱، الف) و (۱.۱، ب) ارتفاع CF را رسم کنید،
دومثلت BCJ و FCA متشابه بوده و خواهید داشت:

$$BC \cdot CA = CJ \cdot FC ; ab = 2Rh_c$$

بند ۴.۱

۱- با توجه به شکل (۴.۱، الف) شعاعهای سه دایره x و y و z است و داریم:

$$y+z=a \text{ و } z+x=b \text{ و } x+y=c$$

$$x+y+z=s \text{ و } \dots$$

۲- قضیه (۲، ۴.۱) و تمرین ۳ از بند ۱.۱ را بکار ببرید.

۳- قضیه سوا را بکار ببرید با توجه به آنکه:

$$AY=AZ=x \text{ و } BZ=BX=y \text{ و } CX=CY=z$$

۴- نیمسازهای داخلی و خارجی هر یک از زاویه‌های مثلث برهم عمودند.

۵- داریم:

$$S(ABC) = S(I_a CA) + S(I_a AB) - S(I_a CB)$$

$$= \frac{1}{2} (b+c-a)r_a = (s-a)r_a$$

همچنین می‌توان از تشابه دومثلث AIY و $AI_a Y_a$ استفاده کرد و نتیجه گرفت که:

$$\frac{r_a}{r} = \frac{s}{s-a}$$

۶- داریم:

$$\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = \frac{s-a}{s} + \frac{s-b}{s} + \frac{s-c}{s} = 1$$

بند ۵.۱

۱- با توجه به اینکه:

$$\widehat{BCM} = 48^\circ = \widehat{CMB} \text{ و } \widehat{CBN} = 12^\circ = \widehat{BNC}$$

نتیجه می شود که: $BM = BC = CN$

توجه خواهید داشت که I_a مرکز دایره محاطی خارجی در خارج پاره خط CN و در داخل پاره خط BM واقع است.

۲- در بکاربردن لم (۲۰۱، ۵۰۱) از قضیه (۱، ۵۰۱) در مورد نیمسازهای داخلی از این جهت اشتباهی پیش نمی آید که دایره محیطی مثلث BCN که با خط BM در M' برخورد می کند M' بین B و M واقع است و نابرابری $BM > BM'$ درست می باشد. اما وقتی BM نیمساز خارجی زاویه B باشد M' در خارج B و M قرار می گیرد و نابرابری $BM > BM'$ را نمی توان در هر حال درست دانست.

۳- از برابری $BM = CN$ نتیجه می شود:

$$ca \left[1 - \left(\frac{b}{c+a} \right)^2 \right] = ab \left[1 - \left(\frac{c}{a+b} \right)^2 \right]$$

$$a(a+b+c)[(a+b+c)(a^2+bc)+2abc](b-c) = 0$$

بند ۶.۱

۱- چهار ضلعی BCEF محاطی است و نتیجه می شود که زاویه B با زاویه AEF برابر است و ...

۲- نقطه H بازهم روی نیمساز داخلی زاویه EDF اما روی نیمسازهای خارجی زاویه های FED و DFE قرار خواهد داشت.

۳- پاسخ تمرین قبلی را ملاحظه کنید.

۴- داریم:

$$\widehat{HAC} = 90^\circ - C \text{ و } \widehat{OAC} = 90^\circ - B$$

بند ۷.۱

۲- با توجه به شکل (۶.۱، الف) داریم:

$$\overline{OA}^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2$$

همچنین با فرض $GA' = n$ داریم $AG = 2n$ و $AA' = 3n$ و با توجه به تمرین ۶ از بند ۳.۱ داریم:

$$3n = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

اکنون قضیه استوارت را برای مثلث OAA' بکار می‌بریم؛ خواهیم داشت:

$$2n(\overline{OG}^2 + 2n^2) = 2n\overline{OA'}^2 + n\overline{OA}^2 = n\left(2R^2 - \frac{1}{2}a^2 + R^2\right)$$

$$\overline{OA}^2 = (3\overline{OG})^2 = 9R^2 - \frac{3}{2}a^2 - 18n^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

۳- با فرض $b > c$ و با توجه به قضیه فیثاغورس داریم:

$$\overline{BA}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AA'}^2 - \overline{DA'}^2$$

$$c^2 - \left(\frac{a}{2} - \overline{DA'}\right)^2 = \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) - \overline{DA'}^2$$

$$\overline{DA'} = \frac{b^2 - c^2}{2}$$

۴- هرگاه خط‌الرأ با BC موازی باشد با AD در یک سوم از طول آن برخورد

می‌کند، پس $OA' = \frac{AD}{3}$. اکنون کافی است که AD و OA' را به صورت زیر

بنویسیم:

$$AD = b \sin C = 2R \sin B \sin C$$

$$OA' = R \cos A = R(\sin B \sin C - \cos B \cos C)$$

بند ۸.۱

۱- OA' با نصف AH یعنی با AK برابر است و همچنین با آن موازی است.

۲- بنا بر آنچه در پایان بند ۶.۱ گفته شد، EF بر OA و بر موازی آن $A'K$ عمود است. بنابراین قطر $A'K$ و وتر EF و کمان EF را در وسط آنها قطع می‌کند.

۳- مثلث ABC مثلث ارتفاعی مثلث $I_a I_b I_c$ است.

۴- مرکزهای دایره‌های متساوی PBC و PCA و PAB را به ترتیب O_a ، O_b و O_c می‌نامیم. هر یک از چهار ضلعیهای $PO_a CO_b$ و $PO_b AO_c$ لوزی است. پس مثلثهای $PO_b O_a$ و $O_b AC$ با هم برابرند و $AC = O_c O_a$. همچنین داریم $CB = O_b O_c$ و $BA = O_a O_b$. بنابراین مثلثهای ABC و $O_a O_b O_c$ با هم برابرند.

و شعاعهای دایره‌های محیطی آنها نیز با هم برابرند. از طرفی AP بر O_bO_c که با BC موازی است عمود است؛ پس AP، BP و CP ارتفاعهای مثلث ABC می‌باشند و P همان H مرکز ارتفاعی مثلث است.

۵- DK بر BC عمود و KA' قطر دایره نه نقطه است. پس این دایره با ضلع BC به زاویه زیر برخورد می‌کند:

$$\widehat{DKA'} = \widehat{HKN} = \widehat{HAO} = |B - C|$$

(تمرین ۴ از بند ۶.۱ را ملاحظه کنید).

بند ۹.۱

۱- خط CP را تا نقطه D امتداد می‌دهیم به گونه‌ای که مثلث BDP متساوی-الاضلاع باشد. از تشابه مثلثهای DCB و PCQ نتیجه می‌شود:

$$\frac{DB}{PQ} = \frac{DC}{PC} = 1 + \frac{DP}{PC}$$

دو طرف را بر $DB = PB = DP$ تقسیم می‌کنیم. بدست می‌آید:

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} = \frac{1}{PC}$$

۲- برابری $PC = PD$ به سادگی (از برابر دو مثلث PCB و PAD) نتیجه می‌شود. فرض می‌کنیم که $PD < CD$ در این صورت زاویه CPD از هر یک از دو زاویه PCD و PDC و در نتیجه از 60° بزرگتر است و خواهیم داشت:

$$\widehat{DPA} < 75^\circ \text{ و } AD < PD < CD$$

که خلاف فرض مسئله است. اکنون فرض می‌کنیم $PD > CD$ به همان طریق نتیجه خواهد شد $AD > CD$ که باز خلاف فرض مسئله (مربع بودن ABCD) است. بنابراین $PD = CD$.

راه‌حلهای دیگری نیز برای این مسئله وجود دارد. مثلاً می‌توان در داخل مربع، مثلث BQC را برابر با مثلث APB رسم کرد که نتیجه می‌شود مثلث BPQ متساوی-الاضلاع است. خط CQ که بر BP عمود است از وسط BP می‌گذرد و در نتیجه:

$$CP = CB = CD$$

۳- با توجه به شکل رابطه‌های زیر را داریم:

$$\frac{\sin(\delta+\epsilon)}{\sin\gamma} = \frac{\sin(\delta+\epsilon)\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\gamma} = \frac{CD}{PC} \cdot \frac{PC}{BC} = \frac{CD}{BC} = \frac{AB}{AD}$$

$$= \frac{AB}{PA} \cdot \frac{PA}{AD} = \frac{\sin(\gamma+\epsilon)\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin\delta} = \frac{\sin(\gamma+\epsilon)}{\sin\delta}$$

$$\sin\gamma\sin(\gamma+\epsilon) = \sin\delta\sin(\delta+\epsilon)$$

$$\cos\epsilon - \cos(\gamma+\epsilon) = \cos\epsilon - \cos(\delta+\epsilon)$$

$$\gamma = \delta$$

۴- از D موازی با BC رسم می‌کنیم تا با AB در F برخورد کند. خط CF را رسم می‌کنیم که با BD در G برخورد می‌کند. مثلث BCG متساوی‌الاضلاع است و BG=BC. در مثلث متساوی‌الساقین CBE داریم BE=BC. بنابراین مثلث BGE متساوی‌الساقین بوده و در نتیجه:

$$\widehat{BGE} = 80^\circ \quad \text{و} \quad \widehat{FGE} = 40^\circ$$

و چون زاویه EFG نیز برابر ۴۰° است پس مثلث FEG متساوی‌الساقین است و FE=EG. همچنین داریم DF=DG، پس دو مثلث GDE و FDE باهم برابرند و DE نیمساز زاویه FDG بوده و زاویه EDB برابر ۳۰° است.

۵- هرگاه D و E نقطه‌های تقسیم نیم‌دایره به قطر AC باشد وترهای AD و DE و EC ضلعهای شش‌ضلعی منتظم محاطی بوده باهم برابرند و DE با AC موازی است. ضلعهای AB و BC را امتداد می‌دهیم تا با امتداد DE در P و Q برخورد کنند. مثلثهای PAD و QCE متساوی‌الاضلاع و باهم برابرند. پس ضلع PQ از مثلث متساوی‌الاضلاع BPQ به سه پاره برابر بخش شده و از آنجا نتیجه می‌گیریم که ضلع AC نیز به سه پاره برابر بخش گردیده است.

بند ۱.۲

۱- کمترین مقدار قوت نقطه R^2 - و نقطه نظیر آن مرکز دایره است.

۲- دایره‌ای است هم مرکز با دایره مفروض.

۳- t برابر است با طول مماسی که از آن نقطه بردایره رسم می‌شود.

۴- داریم:

$$\overline{PT}^2 - \overline{PU}^2 = \overline{OU}^2 - \overline{OT}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OT}^2 = \overline{QT}^2$$

۵- داریم:

$$R(R - 2r) = R^2 - 2rR = d^2 \geq 0 \text{ و } R > 0 \Rightarrow R - 2r \geq 0$$

۶- قوت مورد نظر برابر است با:

$$d^2 - R^2 = -2rR$$

۷- هرگاه در شکل (۲.۱، پ) P را به جای A و A را به جای X قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\overline{BC} (\overline{PA}^2 + \overline{BA} \cdot \overline{AC}) = \overline{PC}^2 \cdot \overline{BA} + \overline{PB}^2 \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{BC} (\overline{PA}^2 + \overline{CA} \cdot \overline{AB}) + \overline{PB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{PC}^2 \cdot \overline{AB} = 0$$

۸- برضلع BC نقطه‌های U و V را انتخاب می‌کنیم که $BU = UV = VC$ باشد. GU با AB و GV با AC موازی است و داریم:

$$\overline{GX} \left(\frac{1}{\overline{GX}} + \frac{1}{\overline{GY}} + \frac{1}{\overline{GZ}} \right) = 1 + \frac{\overline{VX}}{\overline{VC}} + \frac{\overline{UX}}{\overline{UB}}$$

$$= 1 + \frac{\overline{VX} - \overline{UX}}{\overline{VC}} = 1 + \frac{\overline{VU}}{\overline{UV}} = 0$$

۹- پاسخ: $143/2$ کیلومتر.

بند ۲.۲

۱- بخشی از محور اصلی دودایره که در بیرون آنها واقع است مکان هندسی مورد نظر است.

۲- وسط‌های مماس‌های مشترک دودایره نقطه‌هایی هستند که از آنها مماس‌های برابر بر دودایره رسم شده است، پس بر محور اصلی دودایره واقعند.

۳- از تشابه دو مثلث PAB و AQB نتیجه می‌شود که دوزاویه PBA و AQB باهم برابرند. نقطه Q بر BP قرار دارد و داریم:

$$\frac{PB}{AB} = \frac{AB}{QB}$$

همچنین از تشابه دو مثلث AQB و ABR تساوی دو زاویه BAQ و ARB نتیجه شده و R بر AQ واقع بوده و داریم:

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{AB}{AR}$$

از دورابطه بالا داریم:

$$\overline{AB}^2 = PB \cdot QB = AQ \cdot AR$$

دو نقطه A و B از مرکز دایره PQR به یک فاصله است و عمود منصف AB محور تقارن این دایره است. بنابراین نقطه‌های P'، Q' و R' به دایره PQR تعلق دارند و نقطه‌های برخورد این دایره با خطهای BR، AP' و AP می‌باشند.
۴- معادله داده شده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

برای آنکه این رابطه با معنی باشد باید داشته باشیم:

$$a^2 + b^2 - c \geq 0 \quad ; \quad c \leq a^2 + b^2$$

در حالت $c = a^2 + b^2$ دایره به شعاع صفر خواهد بود.

۵- دایره دلخواهی رسم می‌کنیم که مرکزش در خارج خط المרכזین دو دایره واقع باشد و اولی را در A و B و دومی را در C و D قطع کند. محورا اصلی دودایره از نقطه برخورد AB و CD می‌گذرد و بر خط المרכזین دودایره عمود است.

بند ۳.۲

۱- مماس مشترك دو دایره با AB در O برخورد می‌کند. دو مثلث OAT و OTB متشابهند و $OT = OP$ می‌توان نوشت:

$$\frac{TA}{TB} = \frac{OP}{OB} = \frac{OA}{OP} = \frac{OP - OA}{OB - OP} = \frac{AP}{PB}$$

و بالاخره از عکس قضیه (۳.۳.۱) استفاده کنید.

۲- شش مماسی که از O مرکز اصلی سه دایره بر آنها رسم می‌شوند دارای طولهای برابرند پس نقطه‌های تماس آنها با دایره‌ها روی دایره‌ای به مرکز O قرار دارند.

بند ۴.۲

۱- شکل (۴.۲، ب) را در نظر بگیرید. نقطه‌های D، E، F به ترتیب در وسط HD' ، HE' ، HF' واقعند و در نتیجه ضلعهای مثلث $D'E'F'$ با ضلعهای مثلث ارتفاعی موازیند و دو مثلث متشابهند.

۲- داریم:

$$\widehat{MLN} = \widehat{MLA} + \widehat{ALN} = \widehat{MBA} + \widehat{ACN} = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{B+C}{2}$$

$$\widehat{NML} = \frac{C+A}{2} \quad \text{و} \quad \widehat{LNM} = \frac{A+B}{2}$$

بند ۵.۲

۱- بلی.

۲- نقطه‌ای که در سردیگر قطر مرسوم از B واقع است.

۳- رأسهای مثلث، ارتفاعهای مثلث.

۴- خطهای PB، PC، A_1B_1 و C_1A_1 را رسم کنید. چهار گوشه‌های A_1BC_1P و A_1PB_1C محاطی‌اند و:

$$\widehat{A_1B_1P} = \widehat{A_1CP} = \widehat{BCP} = \widehat{C_1BP} = \widehat{C_1A_1P}$$

$$\widehat{PA_1B_1} = \widehat{PCB_1} = \widehat{PBC} = \widehat{PBA_1} = \widehat{PC_1A_1}$$

دو مثلث PA_1B_1 و PC_1A_1 متشابه‌اند و از آنجا:

$$\overline{PA_1}^2 = \overline{PB_1} \cdot \overline{PC_1}$$

بند ۶.۲

۱- قضیه‌های (۱، ۶.۲) و (۲، ۶.۲) را با شرط $AB=BC=CA$ بکار ببرید.

۲- قضیهٔ بطلمیوس را برای چهار ضلعیهای PABC و PDAB بکار ببرید و

نتیجه بگیرید:

$$PA + PC = PB\sqrt{2} \quad \text{و} \quad PB + PD = PA\sqrt{2}$$

۳- از شکل نتیجه می‌شود که:

$$\widehat{QPR} = \widehat{QAR} = \widehat{CAD} = \widehat{ACB}$$

$$\widehat{PRQ} = \widehat{PAQ} = \widehat{BAC}$$

دو مثلث PQR و CBA متشابه‌اند و با بکار بردن قضیهٔ بطلمیوس نتیجه می‌شود:

$$AP \cdot RQ + AR \cdot QP = AQ \cdot RP$$

$$AP \cdot AB + AR \cdot BC = AQ \cdot AC$$

بند ۷.۲

۱- اگر OH خط‌اولر نظیر مثلث ABC (شکل ۷.۱، الف) و PP' قطری ازدایرهٔ محیطی این مثلث باشد، بنا به قضیهٔ (۲، ۷.۲) خط مماسن نقطه‌های P و P' باHP و HP' در M و M' وسطهای آنها برخورد می‌کند. بنا به قضیهٔ (۲، ۸.۱) نقطه‌هایO، M، M' و N که وسطهای PP' ، HP، HP' و OH می‌باشند، نقطهٔ N

همچنین وسط MM' است. همچنین شعاع دایره نه نقطه بنا به قضیه (۱، ۸۰۱) برابر است با:

$$NM = \frac{1}{2} OP = \frac{1}{2} R$$

پس MM' قطری از دایره نه نقطه است. هرگاه X نقطه برخورد خطهای مماس باشد، زاویه MXM' قائمه است (قضیه ۱، ۷۰۲) و بنابراین X روی دایره نه نقطه واقع است.

۲- در مثلث متساوی الاضلاع مرکزهای دایره‌های محیطی و نه نقطه برهم واقعند.

بند ۸.۲

۱- همان اثبات قضیه پروانه را با اندک تغییراتی در علامات بکار ببرید.

۲- مرکز دایره را با O و نقطه برخورد AP با HT را به X می‌نماییم. دو مثلث AHX و ABP همچنین دو مثلث HTB و TOP متشابهند و در نتیجه:

$$\frac{HX}{AH} = \frac{BP}{AB} \quad \text{و} \quad \frac{HT}{HB} = \frac{TO}{TP}$$

$$\frac{HX}{HT} = \frac{HX \cdot HT}{HT^2} = \frac{HX \cdot HT}{AH \cdot HB} = \frac{BP \cdot TO}{TP \cdot AB} = \frac{1}{2}$$

۳- با فرض $b > c$ روی BC نقطه X را به گونه‌ای می‌گزینیم که:

$$BX' = XC = s - c$$

در نتیجه:

$$XA' = A'X' = \frac{b-c}{2}$$

ارتفاع AD را رسم می‌کنیم. بنا به تمرین ۳ از بند ۷.۱ داریم:

$$DA' = \frac{b^2 - c^2}{2a}$$

$$DX' = DA' + A'X' = \frac{b^2 - c^2}{2a} + \frac{b-c}{2} = \frac{s(b-c)}{a}$$

$$AD = \frac{2S(ABC)}{a} = \frac{2sr}{a}$$

$$\frac{DX'}{AD} = \frac{b-c}{2r} = \frac{XA'}{r} = \frac{XA'}{IX}$$

بنابراین دو مثلث ADX' و IXA' متشابهند و AX' با IA' موازی است. بنابراین خط IA' از وسط XX' همچنین از وسط AX می‌گذرد.

بند ۹.۲

۱- خطهای UX و VY و WZ نیمسازهای زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع XYZ می‌باشند.

۲- باید $A = 108^\circ$ و $B = C = 36^\circ$

۳- نقطه‌های A ، Y' و Z' دایره را به سه کمان برابر تقسیم می‌کنند. همچنین Z و Y کمان $Y'Z'$ را به سه بخش برابر تقسیم می‌کند.

۴- با توجه به شکل (۹.۲، ب) خواهیم داشت:

$$\widehat{BZX} = 60^\circ + \alpha \quad \text{و} \quad \widehat{BXC} = 120^\circ + \alpha$$

$$\frac{ZX}{\sin \beta} = \frac{BX}{\sin(60^\circ + \alpha)} \quad \text{و} \quad \frac{BX}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin(120^\circ + \alpha)}$$

$$= \frac{2R \sin 3\alpha}{\sin(60^\circ - \alpha)}$$

$$ZX = \frac{2R \sin 3\alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{2R \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha) \sin \beta \sin \gamma}{\cos 2\alpha - \cos 120^\circ}$$

$$= 4R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

۵- طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع XYZ را واحد می‌گیریم. داریم:

$$BC = Y'Z' = 3 \quad \text{و} \quad BY' = CZ' = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{CBX} = \operatorname{tg} \widehat{CBZ'} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad \operatorname{tg} \widehat{ZBY'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\widehat{CBX} = \widehat{ZBY'} = 30^\circ$$

بند ۱.۳

۱- با توجه به شکل (۱.۳، ب) ملاحظه می‌شود که:

$$PS = QR = \frac{BD}{2}$$

$$PS + QR = BD \quad \text{و} \quad PQ + RS = AC$$

۲- اگر $ABCD$ چهارگوشه‌داده شده و X و Y به ترتیب وسطهای AC و

BD باشد، کافی است که تمرین ۶ از بند ۳.۱ را برای مثلثهای ABC ، CDA و

- BDX بکار ببریم. (توجه خواننده به این نکته جلب می شود که «هر چهار گوشه» که در صورت مسئله بیان شده است چهار گوشه چپ را نیز در بر می گیرد).
- ۳- از تمرین قبل استفاده می شود با این تفاوت که $XY=0$ است.
- ۴- قضیه بطلمیوس را بکار ببرید.

بند ۲.۳

- ۱- اولاً از این ویژگی استفاده کنید که اگر از يك نقطه دو مماس بردایره ای رسم کنیم طولهای آنها باهم برابرند. ثانیاً قضیه (۲،۲،۳) را بکار ببرید با توجه به اینکه:

$$s=a+c=b+d$$

۲- پاسخ: $۴\sqrt{۲۶}$ ، ۸۴

۳- پاسخ:

$$r = \frac{S(ABC)}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

- ۴- با توجه به تمرین ۵ از بند ۴.۱ و تمرین ۳ از بند ۱.۱ داریم:

$$\begin{aligned} r_b + r_b + r_c - r &= S(ABC) \left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s} \right] \\ &= \frac{S(ABC)abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{S(ABC)} = 4R \end{aligned}$$

$$S(I_a I_b I_c) = S(I_a CB) + S(I_b AC) + S(I_c BA) + S(ABC)$$

$$= \frac{1}{2} (ar_a + br_b + cr_c) + sr$$

$$= \frac{1}{2} s(r_a + r_b + r_c - r) - \frac{1}{2} (s-a)r_a$$

$$- \frac{1}{2} (s-b)r_b - \frac{1}{2} (s-c)r_c + 3sr$$

$$= \frac{1}{2} s \cdot 4R - \frac{3}{2} S(ABC) + \frac{3}{2} S(ABC)$$

$$= 2sR$$

۵- داریم:

$$K = \frac{abn}{2R} + \frac{cdn}{2R} = \frac{(ab+cd)n}{2R} = \frac{lmn}{2R}$$

۶- در حالت $d=0$ داریم:

$$l=a \text{ و } m=b \text{ و } n=c \text{ و } K=\frac{abc}{4R}$$

۷- مساحت را يك بار با استفاده از تمرین ۳ از بند ۱۰۱ برای دو مثلث شکل (۲.۳، ب) و افزودن آنها به هم بدست آورید و بار دیگر با استفاده از همان روش اما برای دو مثلث قطر EF بدست آورید. آنگاه آنها را در هم ضرب کرده و قضیه بطلمیوس را بکار ببرید.

۸- کمانهایی را که از برخورد نیمسازها با دایره بوجود می آیند باهم مقایسه کنید.

۹- از P عمودهایی بر ضلعهای مستطیل رسم کنید و قضیه فیثاغورس را چهار بار بکار ببرید. (به سادگی می توان دریافت که P می تواند در خارج از صفحه مستطیل نیز واقع باشد).

۱۰- اگر ABCD چهار گوشه محاط در دایره به قطر d و P نقطه ای از دایره باشد، با توجه به تمرین ۹ از بند ۳.۱ حاصل ضرب فاصله های P از AB و CD برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{PA \cdot PB}{d} \cdot \frac{PC \cdot PD}{d} &= \frac{PB \cdot PC}{d} \cdot \frac{PD \cdot PA}{d} \\ &= \frac{PA \cdot PC}{d} \cdot \frac{PB \cdot PD}{d} \end{aligned}$$

بند ۳.۳

۱- قطرهای CP و CQ از دایره ای را که روی ضلعهای BC و CA از مثلث ساخته شده اند رسم کنید. همچنین مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین BAR را به وتر AB رسم کنید. با توجه به تشابه مثلثهای PCB، CQA، و BAR از قضیه های (۳.۳، ۳) و (۵.۳، ۳) استفاده کنید.

۲- الف: خطهای PO_1 ، QO_1 و RO_1 عمود منصفهای ضلعهای مثلث ABC می باشند.

ب: هرگاه X، Y، Z نقطه های برخورد خطهای AO_1 ، BO_1 ، CO_1 با ضلعهای مثلث ABC باشد، داریم:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{S(ABO_1)}{S(CAO_1)} = \frac{c \sin(B+30^\circ)}{b \sin(C+30^\circ)}$$

برای نسبتهای $\frac{AZ}{ZB}$ و $\frac{CY}{YA}$ نیز مقادیرهای متشابه بدست می آید و از آنجا از عکس قضیهٔ سوا استفاده می شود.

پ: از تساوی دو مثلث PCA و BCQ و تساوی PA=BQ نتیجه می شود. همچنین داریم:

$$BQ=CR \text{ و } \widehat{PFC}=\widehat{PBC}=60^\circ$$

به روش مشابه خواهیم داشت:

$$\widehat{CFQ}=60^\circ \text{ و } \widehat{QFA}=60^\circ$$

از جمع طرفین رابطه های بالا نتیجه می شود که زاویهٔ PFA برابر با 180° است، یعنی نقطهٔ F بر خط PA قرار دارد. به همین ترتیب ثابت می شود که نقطهٔ F بر خطهای BQ و CR نیز قرار دارد. یعنی سه خط AP، BQ و CR در F متقاطع و شش زاویهٔ 60° می سازند.

۳- با روشی مشابه با آنچه که در قسمت ب از تمرین ۲ گفته شد عمل کرده و از عکس قضیهٔ سوا استفاده کنید.

۴- شکلهای (۳.۳، ب) و (۳.۳، پ) را با هم و به صورت يك شکل در نظر می گیریم. شش مثلث BO_1N_1 ، CN_1O_1 ، CO_1N_1 ، AN_1O_1 ، AN_1O_1 و BO_1N_1 متساوی الاضلاعند. همچنین شش مثلث AN_1O_1 ، AO_1N_1 ، O_1BN_1 ، O_1N_1C ، N_1O_1C ، N_1BO_1 با مثلث ABC مستقیماً متشابهند و با یکدیگر برابرند. بنابراین خواهیم داشت:

$$N_1O_1=O_1N_1=BN_1=BO_1=O_1C=N_1C=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$N_1O_1=O_1N_1=CN_1=CO_1=O_1A=N_1A=\frac{b}{\sqrt{3}}$$

$$N_1O_1=O_1N_1=AN_1=AO_1=O_1B=N_1B=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$\widehat{O_1BO_1}=\widehat{O_1BN_1}+\widehat{N_1BO_1}=60^\circ+B$$

$$\widehat{BO_1N_1}=\widehat{BO_1A}-\widehat{N_1O_1A}=120^\circ-B$$

بنابراین چهار گوشهٔ $BO_1N_1O_1$ (که دو ضلع روبه ریش با هم برابرند) متوازی الاضلاع است. هرگاه وسط O_1O_1 را با X و وسط CA (که همچنین وسط O_1N_1 است) را با B' نشان دهیم، نتیجه می شود که XB' با O_1N_1 و BO_1 موازی است. چون

BO_1 دو برابر XB' است، خطهای O_1X و BB' در G برخورد می‌کنند به گونه‌ای که: $BG = 2GB'$ و $O_1G = 2GX$. اما O_1X و BB' میانه‌های مثلثهای $O_1O_2O_3$ و $O_1O_2O_3$ می‌باشند، پس G مرکز ثقل مشترک دو مثلث مزبور است. هرگاه متوازی‌الاضلاع ABC را به جای متوازی‌الاضلاع $BO_1N_2O_3$ قرار دهیم با روش مشابه نتیجه خواهد شد که G همچنین مرکز ثقل مثلث $N_1N_2N_3$ است.

بند ۴.۳

۱- اگر AX ، BY ، CZ نیمسازهای خارجی مثلث ABC باشند

داریم:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = +1$$

۲- اگر AX' و BY' دو نیمساز داخلی و CZ نیمساز خارجی زاویه

دیگر باشد، داریم:

$$\frac{\overline{BX'}}{\overline{CX'}} \cdot \frac{\overline{CY'}}{\overline{AY'}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \left(-\frac{c}{b}\right) \left(-\frac{a}{c}\right) \frac{b}{a} = +1$$

بند ۵.۳

۱- اگر AC و BD باهم موازی باشند، چهار ضلعیهای $ABDE$ و $CDFA$

متوازی‌الاضلاعند و نتیجه می‌شود که $BD = AE$ و $DF = CA$ و از جمع این دو رابطه

نتیجه می‌شود که $BF = CE$. بنابراین $EFBC$ نیز متوازی‌الاضلاع است و EF با

BC موازی است.

اگر AC و BD در یک نقطه O مشترک باشند، چون داریم:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OE}{OD} \quad \text{و} \quad \frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OF}$$

خواهیم داشت:

$$OB \cdot OE = OA \cdot OD = OC \cdot OF$$

$$\frac{OE}{OF} = \frac{OC}{OB}$$

۲- هرگاه R نقطه برخورد AB و DE باشد، بنابه قضیه پاپوس سه نقطه

M ، N ، R بر یک خط راست واقعند یعنی سه خط AB ، DE ، MN متقارند.

- ۳- بنا به قضیه پاپوس خط MN از مرکز متوازی الاضلاع می گذرد ، پس روی ضلعهای روبرو پاره خطهایی پدید می آورد که نظیر به نظیر باهم برابرند.
- ۴- پاسخ : نه نقطه ؛ نه خط ؛ بر هر نقطه سه خط می گذرد ؛ روی هر خط سه نقطه واقع است.

بند ۶.۳

- ۱- هرگاه دو مثلث PQR و P'Q'R' به مرکز O همسان باشند و علاوه بر آن QR با Q'R' و RP با R'P' موازی باشد ، داریم :

$$\frac{OQ}{OQ'} = \frac{OR}{OR'} = \frac{OP}{OP'}$$

بنابراین PQ با P'Q' موازی است.

- ۲- پاسخ : ده نقطه ؛ ده خط ؛ بزرگ نقطه سه خط می گذرد ؛ روی هر خط سه نقطه واقع است.

۳- الف: OQR و P'FE

ب: PFE و OQ'R'

پ: FQ'Q' و ERR'

- ۴- رأسهای هر پنج ضلعی روی ضلعهای پنج ضلعی دیگر واقعند. روی شکل کلاسش جفت پنج ضلعی باهمان وضعیت یافت می شود ، مثل RPP'Q'D و EFQOR'.
- ۵- مثلث PQR را در نظر می گیریم که رأسهای Q و R از آن روی c و f ، خطهای داده شده ، واقع باشند. نقطه های D و E را بر امتدادهای QR و RP انتخاب می کنیم و نقطه برخورد DE و QP را F می نامیم. نقطه Q' را بر c اختیار می کنیم و نقطه برخورد DQ' را با f بد R' نشان می دهیم. خطهای ER' و FQ' در P' برخورد می کنند. خط PP' که رسم شود با خطهای e و f متقارب می باشد.
- در حالتی که دو خط c و f موازی باشند ، خط PP' که با روش بالا بدست می آید نیز با آنها موازی خواهد بود.

بند ۷.۳

- ۱- ضلعهای AB ، CD ، EF را امتداد می دهیم تا از برخورد آنها با یکدیگر مثلث UVW پدید آید که A و B بر UV ، C و D بر VW ، E و F بر WU واقع باشند. چون UE=AD=FW ، نتیجه می شود که BC=EF=AD. پس BCFU متوازی الاضلاع است و CF با AB موازی است. هرگاه X و Y نقطه های برخورد

BE با CF و AD باشد، CDEX و BCDY متوازی الاضلاعند و A' و F' مرکز های آنها که وسطهای DB و DX می باشند روی خطی موازی با BX و AF قرار دارند و داریم:

$$AF = BX = 2F'A'$$

بنابراین AA' و FF' در G برخورد می کنند به گونه ای که:

$$AG = 2GA' \text{ و } FG = 2GF'$$

اما AA' و FF' میانه های مثلثهای ACE و BDF می باشند، پس G مرکز ثقل هر يك از این دو مثلث است.

۲- پاسخ: شش گونه

بند ۸.۳

۱- فرض می کنیم پنج رأس A، B، C، D و E از شش ضلعی ABCDEF روی يك دایره واقع باشند و نقطه برخورد این دایره را با ضلع AF علاوه بر A به F' نشان می دهیم. همچنین فرض می کنیم که خطهای AB و DE در L، خطهای CD و FA در M، خطهای BC و EF در N برخورد کرده و سه نقطه L، M، N بر يك خط راست واقع باشند. بنا به قضیه پاسکال هر يك از خطهای EF و EF' باید بر نقطه N (نقطه برخورد BC با LM) بگذرند. بنابراین F' بر F واقع است.

۲- پنج ضلعی ABCDE را می توان به صورت شش ضلعی AABCCE یا به صورت شش ضلعی ABCCEA در نظر گرفت و از قضیه پاسکال استفاده کرد.

بند ۹.۳

۱- چهار ضلعی را به صورت شش ضلعی BQCEPF در نظر بگیرید.

۲- خطهای AC، BE، QF.

۳- شکل (۴.۱، الف) را به صورت شش ضلعی AZBXCXY در نظر بگیرید.

بند ۱۰.۴

۱- پاره خط a را به صورت يك بردار در نظر گرفته و مثلث ABC را به بردار a يك بار در جهت مثبت و بار دیگر در جهت منفی انتقال دهید تا مثلثهای A'B'C' و A''B''C'' بدست آیند. آنگاه نقطه برخورد AB و A''C'' را به نقطه برخورد AC و A'B' وصل کنید.

۲- شکل سنگفرش از آجرهای به شکل مثلث متساوی الاضلاع بدست می آید که در هر رأس آن شش مثلث در کنار هم قرار گرفته اند.

بند ۲.۴

۱- دورانهای به زاویه 90° و به مرکزهای مربها را در نظر بگیرید.

۲- الف: از برابری $\frac{CX}{b} = \frac{a}{a+b}$ نتیجه می شود:

$$\frac{CX}{XA} = \frac{CX}{b-CX} = \frac{a}{a+b-a} = \frac{a}{b}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$\frac{BY}{YC} = \frac{a}{b} \text{ و } \frac{AH}{HB} = \frac{S(CAH)}{S(CHB)} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{CX}{XA} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{AH}{HB} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1$$

بنابراین بنا به قضیه سوا سه خط CH و BJ ، AI متقارند.

ب: روی مثلث ABC متوازی الاضلاع $ABFC$ را می سازیم که M وسط BC مرکز آن می باشد. با توجه به تمرین قبل (تمرین ۱) نتیجه خواهد شد که $MO_4 = MO_3$ و خطهای حامل این دوباره خط برهم عمودند. دوباره خط MO_4 و MC نیز با هم برابر و برهم عمودند. دوران به مرکز M و به زاویه 90° مثلث MO_4O_3 را بر مثلث MCO_3 منطبق می سازد.

پ: مستطیل $KCCG'$ و متوازی الاضلاعهای $DAJA'$ و $IBEB'$ را در نظر بگیرید. با توجه به دورانهای به زاویه های $+90^\circ$ و -90° و حول نقطه های O_3 ، O_4 ، O_1 نتیجه می شود که شش مثلث $B'IB$ ، $C'CG$ ، $CC'K$ ، $JA'A$ ، DAA' و BEB' با مثلث ABC مستقیماً برابرند. از اینجا نتیجه می شود که نقطه های U ، V ، W به ترتیب مرکزهای مستطیل و دو متوازی الاضلاع می باشند.

۳- یک رأس مثلث را تعیین کنید و دوران حول این رأس و به زاویه 60° را انجام دهید.

بند ۳.۴

۱- تقارن مرکزی یکی از دایره ها را نسبت به نقطه A بدست آورید و از نقطه تلاقی آن با دایره دیگر به A وصل کنید.

۲- اگر O و r به ترتیب مرکز و شعاع دایره مفروض باشند، دودایره یکی به مرکز

A و به شعاع r و دیگری به مرکز O و به شعاع $2r$ رسم کنید که یکدیگر را در P و Q قطع می کنند. از A به وسط OP (یا OQ) وصل کنید.
۳- تقارن نسبت به وسط یکی از قطرهای رادرنظر بگیرید:

بند ۴.۴

۱- بنا به ویژگیهای مثلث ارتفاعی، نقطه P را باید در پای ارتفاع وارد از رأس C برگزید.

۲- با توجه به داده های مسئله، طول ارتفاع مثلث ثابت است، پس اگر AB قاعده مثلث باشد، رأس C برخط Δ موازی با AB واقع است. بنا بر آنچه در بند ۴.۴ گفته شده، برای آنکه $AC + CB$ می نیمم باشد لازم و کافی است که C نقطه برخورد Δ با خطی باشد که قرینه A نسبت به Δ را به B وصل می کند. در این حال مثلث ACB متساوی الساقین خواهد بود.

۳- محور تقارن خطی خواهد بود که از A و از وسط خط المרכזین دو دایره می گذرد.

بند ۴.۴

۱- یکی از راه حل های ممکن شامل مرحله های زیر است:

$$\begin{aligned} & (7, 0, 5), (2, 5, 5), (2, 1, 9) \\ & (6, 0, 6), (12, 0, 0), (7, 5, 0) \\ & (11, 1, 0), (11, 0, 1), (6, 5, 1) \end{aligned}$$

۲- نخست پیمانه های ۱۱ لیتری و ۵ لیتری را پرمی کنند. آنگاه ۸ لیتر مانده را به یکی از دزدها می دهند. اکنون باید مسئله به صورت $[16, 13, 11, 5]$ راحل کرد که راه حل آن شامل چهار مرحله است.

۳- بادر نظر گرفتن شکل (۹.۱ ب) و با توجه به داده های مسئله، دو چهار ضلعی متشابه $AC, PB, AB', P'C'$ و $AB', P'C'$ را خواهیم داشت که باهم متشابهند و از آنجا تساوی زاویه های مورد نظر نتیجه می شود.

بند ۴.۴

۱- مکان مطلوب دایره ای است که شعاع آن نصف شعاع دایره ثابت است و مرکز آن وسط پاره خط واصل بین نقطه ثابت و مرکز دایره ثابت می باشد.

۲- روی ضلع BC از مثلث و در خارج آن مربع CBED را می‌سازیم. نقطه‌های برخورد خطهای AD و AE با ضلع BC دورأس مربع مطلوب می‌باشند.

بند ۸.۴

۱- هرگاه $AB'C'$ يك وضع دلخواه از مثلثی باشد که مبدل تشابهی مثلث ABC به مرکز A است و B' بر BC واقع باشد، دو مثلث ABB' و ACC' متشابهند و نتیجه می‌شود که:

$$\widehat{ACC'} = \widehat{ABB'} = \widehat{ABC}$$

۲- با توجه به مجموعه پاره خطهای برابر مذکور در حل تمرین ۴ از بند ۳.۳ ملاحظه می‌شود که دوران به مرکز G و به زاویه 120° (که O_1 را به O_2 و O_2 را به O_3 و O_3 را به O_1 تبدیل می‌کند) نقطه N_3 را به N_2 و N_2 را به N_1 و N_1 را به N_3 تبدیل می‌کند. بنابراین تبدیلی تشابهی وجود دارد که O_3 ، O_2 ، O_1 را به ترتیب به N_3 ، N_2 ، N_1 تبدیل می‌کند. این تبدیل تشابهی که درجهت معکوس است ترکیب يك تجانس با يك تقارن خواهد بود.

بند ۹.۴

$$۱) \quad x' = x + a, \quad y' = y + b$$

$$۲) \quad x' = -x, \quad y' = y$$

$$۳) \quad x' = y, \quad y' = x$$

$$۴) \quad x' = -x, \quad y' = -y$$

$$۵) \quad x' = kx, \quad y' = ky$$

$$۶) \quad x' = -ky, \quad y' = kx$$

$$۷) \quad x' = x + a, \quad y' = -y$$

$$۸) \quad x' = kx, \quad y' = -ky$$

$$۹) \quad x' = x^2, \quad y' = y$$

$$۱۰) \quad x' = x, \quad y' = \begin{cases} y & \text{اگر } x \geq 0 \\ -y & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

بند ۱.۵

۱- داریم:

$$|AC| \mid |BD|, |AC| \mid |DB|, |CA| \mid |BD|, |CA| \mid |DB|, |BD| \mid |AC|, \\ |BD| \mid |CA|, |DB| \mid |AC|, |DB| \mid |CA|.$$

بند ۲.۵

۱- داریم:

$$(BADC) = \frac{BD \cdot AC}{BC \cdot AD} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = (ABCD)$$

تساویهای دیگری به روش مشابه بدست می آیند.

۲- الف: ۱ ، ب: ۲ ، پ: ۳ ، ت: ۱

بند ۳.۵

۱- شکل حاصل همانند يك گل از چهار نیمدایره متساوی که روی ضلعهای يك مربع و در خارج آن رسم شده باشند تشکیل می شود.

۲- باید O را در مرکز دایره محاطی یا خارجی انتخاب کرد.

۳- الف: دایره به مرکز P و به شعاع PO را رسم می کنیم که با دایره O در دو نقطه A و B برخورد می کند. به مرکزهای A و B دودایره چنان رسم می کنیم که بر O بگذرند. نقطه برخورد دیگر این دودایره منعکس نقطه P است.

ب: با معلوم بودن نقطه O و يك نقطه P_۱ می توان با استفاده فقط از پرگار، نقطه P_۲ را چنان یافت که OP_۲ = ۲OP_۱ باشد (دایره به مرکز P_۱ و به شعاع P_۱O را رسم می کنیم و آن را با رسم دایره های به همان شعاع به شش کمان برابر تقسیم می کنیم). همچنین می توان با رسم دایره به مرکز P_۲ و به شعاع P_۲P_۱ و تقسیم آن به شش قسمت نقطه P_۳ را یافت که OP_۳ = ۳OP_۱ باشد. با تکرار عمل می توان نقطه P_n را یافت که OP_n = nOP_۱ باشد. هرگاه $OP_1 > \frac{k}{2n}$ باشد خواهیم داشت $OP_n > \frac{k}{2}$ و بنا به حالت الف می توان P'_n منعکس P_n را بدست آورد. با تعیین نقطه P'_۱ که $OP'_1 = n \cdot OP_1$ باشد منعکس P_۱ بدست می آید.

۴- الف: مثلث A'B'C' با مثلث ABC متشابه است.

ب: بنا به معادله (۴.۲، ۴) مثلث A'B'C' با مثلث ارتفاعی DEF متشابه است.

پ: با توجه به تمرین ۴ از بند ۴.۱ و قضیه (۶.۱، ۱) مثلث A'B'C' با مثلث

I_aI_bI_c متشابه است.

۵- داریم:

$$x' = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2}$$

ع- مثلث متساوی الساقین BO_۱C را چنان رسم می کنیم که هریک از دوزاویه B

و برابر با $A + D - 90^\circ$ باشد. همچنین مثلث متساوی الساقین CO_4A را چنان رسم می‌کنیم که هریک از دوزاویه A و C برابر با $B + E - 90^\circ$ باشد. دایره‌های به مرکزهای O_4 و O_5 را رسم می‌کنیم که بر C بگذرند که در نقطه دیگر O برخورد خواهند داشت. نقطه O قطب انعکاس است و k قوت آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$k^2 = \frac{OA \cdot OB \cdot DE}{AB}$$

بند ۴.۵

۱- هرگاه O مرکز دایره ω باشد، دو مثلث OAP و OPA' متشابهند و داریم:

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{OA}{OP} = \text{ثابت}$$

۲- دو مثلث POB و COP' متشابهند و داریم:

$$\frac{PO}{OB} = \frac{CO}{OP'} \quad \text{و} \quad OP \cdot OP' = k^2$$

۳- دو نقطه P و Q را در درون دایره معلوم α در نظر می‌گیریم. منعکسهای P و Q نسبت به هر دایره به مرکز P عبارتند از P_∞ و Q' و منعکس دایره α در این انعکاس يك دایره α' است که P_∞ و Q' در بیرون α' واقعند. مماسهای مرسوم از Q' بر α' دو «دایره» اند که بر P_∞ و بر Q' می‌گذرند که عبارتند از منعکسهای دودایره‌ای که بر P و Q می‌گذرند و بر α مماس می‌باشند.

۴- نقطه تماس دو دایره از سه دایره را مرکز دایره انعکاس می‌گیریم. در این صورت منعکس شکل مفروض عبارت خواهد بود از دو خط متوازی و دایره‌ای که بر آنها مماس است.

۵- دایره دلخواه به مرکز A را دایره انعکاس می‌گیریم. منعکسهای B ، C و D عبارتند از B' ، C' و D' که C' بر $B'D'$ واقع نخواهد بود مگر آنکه $AC \parallel BD$ باشد. بنابه قضیه (۴.۵، ۱) نابرابری $B'C' + C'D' \geq B'D'$ معادل خواهد بود با:

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD} \geq \frac{BD}{AB \cdot AD}$$

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD \geq AC \cdot BD$$

۶- در حالتی که ω و α متقاطع یا برهم مماس باشند حکم بدیهی است. در حالتی

که ω و α متخارج باشند، معادله‌های آنها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x^2 + y^2 = k^2 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 = ax$$

بنا به تمرین ۵ از بند ۳.۵ معادله منعکس α نسبت به ω می‌شود:

$$\left(\frac{k^2 x}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{k^2 y}{x^2 + y^2} \right)^2 = a \left(\frac{k^2 x}{x^2 + y^2} \right)$$

که پس از ساده کردن خواهیم داشت: $k^2 = ax$

۷- به دو دایره متقاطع؛ نقطه دیگر تقاطع دو خط P_∞ است.

بند ۵.۵

۱- اگر O مرکز دایره ω باشد، دایره به قطر OA را رسم می‌کنیم که با دایره ω در دو نقطه برخورد می‌کند. دایره مطلوب بر این دو نقطه می‌گذرد.

۲- اگر P' منعکس P نسبت به ω باشد، دایره $PP'Q$ جواب مسئله است.

۳- هرگاه P_1 و P_2 منعکسهای P نسبت به دایره‌های ω_1 و ω_2 باشد، دایره PP_1P_2 جواب مسئله است.

۴- حاصل ضرب آنها برابر با k^4 است.

۵- منعکسهای a و P را نسبت به یک دایره به مرکز O بدست می‌آوریم که دایره a' و نقطه P' واقع بر آن خواهد بود. در P' فقط یک خط مماس بر a' می‌توان رسم کرد. همچنین می‌توانیم منعکسهای a و O را نسبت به یک دایره به مرکز P بدست آوریم که خط a' و نقطه O' غیر واقع بر آن خواهد بود و از O' فقط یک خط موازی با a' می‌توان رسم کرد.

بند ۶.۵

۱- دو مثلث ABC و AB_1C_1 که نسبت به خط AS قرینه‌اند با هم برابرند و

بنابراین:

$$\widehat{BSC_1} = \widehat{SBA} - \widehat{SC_1B} = B - C$$

۲- با توجه به تمرین ۳ از بند ۷.۱ داریم:

$$A'D = \frac{b^2 - c^2}{2a}$$

و چنانکه در بند ۶.۵ دیدیم:

$$A'S = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

بنا بر این داریم:

$$A'S \cdot A'D = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

بند ۲.۵

۱- باید داشته باشیم: $c+c'=0$

۲- شعاعهای دو دایره مماس داخلی را با a و b و شعاع دایره نیمساز آنها را با r نشان می‌دهیم. دایره انعکاس را به مرکز نقطه تماس دو دایره انتخاب می‌کنیم. منعکسهای دو دایره می‌شود دو خط موازی که به فاصله‌های $\frac{k^2}{2a}$ و $\frac{k^2}{2b}$ از قطب انعکاس واقعند.

منعکس دایره نیمساز خطی می‌شود موازی و متساوی الفاصله با دو خط موازی که به فاصله $\frac{k^2}{2r}$ از قطب انعکاس بنا بر این داریم:

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

۳- دو دسته خطهای متوازی عمود بر هم بدست می‌آید.

۴- هرگاه يك نقطه از دایره نیمساز دو دایره را قطب انعکاس اختیار کنیم، این دایره به يك خط و دو دایره به دو دایره تبدیل می‌شوند که نسبت به آن خط قرینه‌اند.

۵- تقارن نسبت به يك خط حالت خاص انعکاس نسبت به دایره است.

۶- الف: فرض می‌کنیم $AC \parallel BD$ و علاوه بر آن چهار نقطه مفروض بريك دایره γ واقع باشند. دو دایره β و α را در نظر می‌گیریم که بر دایره γ عمود باشند و α بر A و β بر B و C و D بگذرد و نقطه‌های برخورد این دو دایره را با L و O نشان می‌دهیم. در انعکاس نسبت به دایره به مرکز L دایره‌های α و β به دو قطر از دایره γ تبدیل می‌شوند به گونه‌ای که $A'B'C'D'$ يك مستطیل به مرکز O' خواهد بود.

ب: فرض می‌کنیم $AB \parallel CD$ یا $AD \parallel BC$ و دایره‌های α ، β و γ را به گونه بالا در نظر می‌گیریم، اما این بار دو دایره α و β متقاطع نمی‌باشند. نقطه‌های حد دسته دایره‌های α و β را با L و O نشان می‌دهیم، یعنی L و O نقطه‌های برخورد γ با خط الم مرکزین α و β می‌باشند. در انعکاس نسبت به دایره به مرکز L دو دایره α و β به دو دایره به مرکز مشترك O' تبدیل می‌شوند. چون $A'C'$ و $B'D'$ (که روی يك خط واقعند) قطرهای دو دایره هم مرکز می‌باشند. پس $A'B'C'D'$ يك متوازی الاضلاع به وضع خاص می‌باشد. پ: وقتی A, B, C, D روی يك دایره واقع نباشند، چهار دایره متمایز $ABC, ACD,$

ABD، BCD را معین می کنند. یکی از دو دایره نیمساز دایره های ABC و ACD را که جداسازی بین B و D را پدید می آورد با μ نشان می دهیم. همچنین یکی از دو دایره نیمساز دایره های ABD و BCD را که جداسازی بین A و C را پدید می آورد با ν نشان می دهیم. دو دایره μ و ν در L و O برخورد می کنند. در انعکاس نسبت به دایره به مرکز L دایره های ABC و ACD به دو دایره متساوی $A'B'C'$ و $A'C'D'$ تبدیل می شوند که μ' محور اصلی آنها بین B' و D' جداسازی پدید می آورد به گونه ای که:

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{C'D'A'}$$

همچنین در انعکاس مزبور دایره های ABD و BCD به دو دایره متساوی $A'B'D'$ و $B'C'D'$ تبدیل می شوند که ν' محور اصلی آنها جداسازی بین A' و C' را پدید می آورد و داریم:

$$\widehat{D'A'B'} = \widehat{B'C'D'}$$

بنابراین $A'B'C'D'$ یک متوازی الاضلاع است.

یادداشت: در هر یک از حالت های بالا، جفت نقطه (O و L) به نام «ژاکوبین» جفتهای نقاط (A و C) و (B و D) موسوم است.

۷- خط المرکزین دو دایره را رسم می کنیم که قطر AB از اولی و قطر CD از دومی را پدید می آورد بدگونه ای که $AC \parallel BD$. دایره های به قطر AD و به قطر BC را با α و β نشان می دهیم و L و M نقطه های حدی دسته دایره های $\alpha\beta$ را بدست می آوریم. دایره نیمساز مطلوب دایره به قطر LM است. زیرا در انعکاس نسبت به این دایره که بردایره های α و β عمود است، A به D و B به C تبدیل می شود.

بند ۸.۵

۱- تمرین ۴ از بند ۷.۵ را بکار ببرید.

۲- اتحاد مثلثاتی زیر را در نظر گرفته و در آن θ را با $\frac{r}{p} + \frac{r}{n}$ جانشین سازید:

$$\frac{1}{\sin \theta} - \cot \theta = \tan \frac{\theta}{2}$$

۳- از نقطه نظر هندسه انعکاسی وضع دایره های مورد نظر نظیر شکل مربوط به چیستان اشتیمر در حالت $n=4$ می باشد. بنابراین سه عدد از انحرافهای انعکاسی برابر با $2lg(\sqrt{2}+3)$ و دوازده عدد دیگر برابر با صفر است.

بند ۹.۵

۱- کوچکترین انحراف انعکاسی بین دو دایره داده شده عبارتست از:

$$ch\delta = \left| \frac{1+1-(\sqrt{3}+1)^2}{2} \right| = \sqrt{3}+1$$

درحالی که کسینوس هیپر بولیک بزرگترین انحراف انعکاسی برابر است با:

$$\left| \frac{1+1-2(\sqrt{3}+1)^2}{2} \right| = 4\sqrt{3}+7 = 2ch^2\delta - 1 = ch\ 2\delta$$

دایره مرسوم بین دو دایره نمی تواند نیمساز آنها باشد، زیرا به یک دسته دایره ها تعلق ندارند.

۲- دایره های سدی همان دایره های چیستان اشینر در حالت $n=3$ می باشند.

بنا بر این:

$$ch\frac{\delta}{2} = sec\frac{\pi}{3} = 2$$

۳- مجذور نسبت بین طولهای مماسها برابر است با:

$$\frac{c^2-(a+b)^2}{c^2-(a-b)^2} = \frac{c^2-a^2-b^2-2ab}{c^2-a^2-b^2+2ab} = \frac{ch\delta-1}{ch\delta+1} = th^2\frac{\delta}{2}$$

۴- بارسم شکل درحالت اول حکم به سادگی محقق می شود. درحالت دوم کافی

است که قضیه (۹.۵، ۱) را با فرض $a=b$ و $c=2p$ بکاربرد که نتیجه خواهد شد:

$$ch\ 2\delta = \frac{(2p)^2 - b^2 - b^2}{2b^2} = 2\left(\frac{p}{b}\right)^2 - 1$$

۵- داریم:

$$2sh^2\frac{\delta}{2} + 1 = ch\delta = \frac{r^2 + R^2 - (R^2 - 2rR)}{2rR} = \frac{r}{2R} + 1$$

۶- با توجه به شکل (۳.۱، ب) داریم:

$$AH = \frac{b\cos A}{\sin B} = 2R\cos A$$

و با استفاده از تمرین ۴ از بند ۶.۱ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \overline{OH}^2 &= R^2 + (2R\cos A)^2 - 2R^2\cos A\cos(B-C) \\ &= R^2(1 - 4\cos A\cos B\cos C) \end{aligned}$$

و چون $ON = \frac{OH}{2}$ بنا بر این:

$$\cos \delta \text{ یا } ch\delta = \left[R^2 + \left(\frac{R}{\gamma} \right)^2 - R^2 \left(\frac{1}{\gamma} - 2 \cos A \cos B \cos C \right) \right] \times \frac{1}{R^2}$$

$$= 1 + 2 \cos A \cos B \cos C$$

۷- با توجه به اینکه محور اصلی دودایره به معادله $x=0$ است و با توجه به نتیجه

تمرین ۴ خواهیم داشت:

$$ch\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 - d^2}} \text{ و } ch\beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 - d^2}}$$

بند ۱.۶

۱- در انعکاس نسبت به دایره ω دایره به قطر OA به خط a قطبی نقطه A تبدیل می شود. بنابراین این قطبی و دودایره به یک دسته دایره ها تعلق دارند و در نتیجه a محور اصلی دودایره است.

۲- قطبهای نقطه های A و B به ترتیب بر OA و OB عمودند.

۳- شکل دلخواه F را در نظر می گیریم، قطبهای معکوس F نسبت به یک دایره ω به مرکز O و نسبت به دایره دیگر به همان مرکز با هم متشابهند؛ بنابراین می توان دایره ω را همان دایره محاطی چندضلعی منتظم مفروض $ABC \dots$ اختیار کرد. در این صورت قطبهای هر یک از ضلعهای AB ، BC ، \dots وسطهای این ضلعها و قطبهای رأسهای A ، B ، \dots عبارتند از خطهایی که وسطهای دوضلع مجاور به آن رأس را به هم وصل می کنند. هرگاه دایره محیطی چندضلعی را به عنوان دایره ω انتخاب کنیم، مبدل قطبی معکوس چندضلعی عبارتست از چندضلعی دیگری که ضلعهایش بر دایره محیطی در رأسهای چند ضلعی اول مماس می باشند.

۴- قطبهای دوضلع روبروی مستطیل عبارتند از دو نقطه متساوی الفاصله از O که روی یک خط D واقعند. قطبهای دوضلع روبروی دیگر نیز عبارتند از دو نقطه متساوی الفاصله از O که روی یک خط D' قرار دارند. دو خط D و D' در O برهم عمودند. بنابراین چهار نقطه حاصل یک چهار گوشه تشکیل می دهند که دو قطر آن عمود منصف یکدیگرند، پس این چهار گوشه یک لوزی است. همچنین می توان از این ویژگی استفاده کرد که محورهای تقارن مستطیل روی مماسهایی که در رأسهای مستطیل بر دایره محیطی آن رسم می شوند پاره خطهای برابر جدای می کنند.

بند ۲.۶

بنابداً قضیه (۲.۶، ۱) مماس بر دایره مزدوج عبارتست از نیمساز یکی از دوزاویه

مکملی که بین دایره محیطی با دایره نه نقطه تشکیل می شود ؛ وقتی یکی از این دوزاویه به سمت صفر میل کند دیگری به سمت ۱۸۰° میل خواهد کرد. بنابراین با توجه به تمرین ۶ از بند ۹.۵ داریم:

$$\theta = \frac{1}{2}(180^\circ - \delta)$$

بند ۳.۶

۱- خط b_p قطبی نقطه B_p نسبت به دایره α است ؛ و غیره. نقطه C_p قطب خط $B_p B_q$ نسبت به دایره β است ، و غیره.

۲- برای همه شکل های بند ۳.۶ خط OA یک محور تقارن است. از شکل های (۳.۶، الف) و (۳.۶، پ) برمی آید که برای بیضی و هذلولی می توان محور تقارن دیگری عمود بر OA را در نظر گرفت (موضوعی که در بند ۶.۶ بررسی شده است).

۳- از روی شکل (۳.۶، ب) معلوم می شود که هر مماس t که بر سهمی رسم شود قطبی یک نقطه T از دایره α است. پای عمودی که از O بر t رسم شود منعکس T نسبت به دایره ω است و مکان هندسی آن منعکس دایره α (گذرنده بر O) است که یک خط می باشد.

۴- همانگونه که از شکل (۳.۶، پ) برمی آید ، مجانب u که قطبی نقطه U است بر ضلع OU از مثلث قائم الزاویه OAU عمود است. بنابراین زاویه $A = \theta$ از این مثلث در رابطه زیر صدق می کند:

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{OA}{AU} = \frac{OA}{r} = \varepsilon$$

برای هذلولی متساوی القطرین $\theta = 45^\circ$ و $\varepsilon = \sqrt{2}$ می باشد.

۵- هر گاه مدار یک ستاره دنباله دار سهمی یا هذلولی باشد ، این ستاره مجدداً به خورشید نزدیک نخواهد شد و از طریق مشاهدات نمی توان به وجود چنین ستاره ای حکم قطعی داد. هر چند که دوائر اختلالات ناشی از سیارات (به ویژه مشتری که دارای جرم فوق العاده بزرگ است) آن قسمت از مدار ستاره های دنباله دار که بنظر می رسد به هذلولی شباهت دارد، و هر چند که بعضی از مدار های بیضوی آنقدر کشیده اند که تمایز آنها از سهمی مشکل می باشد، با وجود این سرعت ستاره های دنباله دار نسبت به خورشید به آن اندازه زیاد نیست که در فضای خارج آنقدر دور شوند که جاذبه ستاره دیگری بتواند آنها را به خود بکشد.

بند ۴.۶

۱- معادله مکان به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 = (1 - \varepsilon x)^2$$

۲- مبدأ جدید نسبت به محورهای اول به طول $x = -\varepsilon a$ می باشد و از دو نقطه

$$x = \frac{1}{\varepsilon \pm 1}$$

به يك فاصله است که این دو نقطه محل برخورد مکان هندسی تمرین ۱ با محور

x ها است. در این صورت معادله جدید مکان چنین می شود:

$$(x - \varepsilon a)^2 + y^2 = [1 - \varepsilon(x - \varepsilon a)]^2 = (a - \varepsilon x)^2$$

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = (1 - \varepsilon^2)a^2 = la = \pm b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

علامت $+$ نظیر $\varepsilon < 1$ و علامت $-$ نظیر $\varepsilon > 1$ می باشد. چون این معادله نسبت به x و نسبت به y از درجه زوج است پس بیضی و هذلولی نسبت به هریک از محورها و نسبت به مبدأ مختصات متقارن می باشند.

بند ۵.۶

۱- هرگاه دو مثلث دارای مرکز همسانی باشند، دارای محور همسانی نیز می باشند و بر عکس.

۲- اگر شش رأس يك شش ضلعی متوالیاً روی دو خط واقع باشند، سه نقطه برخورد سه جفت ضلعهای روبروی آن بر يك خط راست واقعند. اگر شش ضلع يك شش ضلعی متوالیاً بر دو نقطه بگذرند، سه قطر آن متقارنند.

۳- آنها در مرکز دایره بر هم عمودند.

۴- خط بینهایت l قطبی نقطه O مرکز دایره ω است، پس هر نقطه از مقطع مخروطی که در بینهایت باشد قطب (نسبت به دایره ω) يك مماس بر دایره α است که از O می گذرد. بنابراین بر حسب آنکه O داخل α ، روی α یا خارج α باشد تعداد نقطه های بینهایت مقطع 0 ، 1 یا 2 می باشد.

۵- روی شکل (۳.۶، پ) مشاهده می شود که OU در U بر α مماس است. بنابراین یکی از نقطه های بینهایت هذلولی نقطه تماس آن با مجانب u است. نقطه دیگر بینهایت آن نقطه تماس با مجانب دیگر است.

۶- خط هادی سهمی قطبی نقطه A است و هر نقطه از این خط قطب قطری از دایره

α است و مماسهایی که از این نقطه بر سهی رسم شوند قطبیهای دوسر قطر نظیر می باشند. هر دو نقطه دوسر هر قطر از دایره α بر دو ضلع يك زاویه قائمه به رأس O واقعند. بنابراین قطبیهای آنها بر هم عمودند.

۷- هر نقطه برخورد دو قطر را می توان همچون نقطه P از قضیه (۵۰۶ ، ۱) در نظر گرفت که دو نقطه برخورد دو جفت قطرهای دیگر بر قطبی نقطه P واقع است.

بند ۶.۶

۱- داریم:

$$OP + O_1P = \varepsilon \cdot PK + \varepsilon \cdot K_1P = \varepsilon \cdot K_1K$$

که K_1K فاصله دو خط هادی است.

۲- اگر P را بر شاخه چپ هذلولی بگیریم ، مطابق باشک (۶.۶ ، پ) داریم:

$$OP - O_1P = \varepsilon \cdot PK - \varepsilon \cdot PK_1 = -\varepsilon \cdot KK_1$$

اگر P بر شاخه راست هذلولی باشد علامت حاصل تغییر می کند.

۳- این دایره منعکس دایره α نسبت به ω است. (تمرین ۳ از بند ۳.۶ را با این تمرین مقایسه کنید).

بند ۷.۶

۱- تصویر جسم نمایی حالت خاص انعکاس است.

۲- صفحه عمود منصف OA (شکل ۷.۶ ، الف) کره α' را در يك دایره عظیمه خاص قطع می کند که اصطلاحاً آن را استوا می نامیم. این استوا هر دایره عظیمه دیگر از کره را در دو نقطه قطع می کند که در دوسر يك قطر واقعند. ویژگی استوا این است که تصویرهای قطرهای آن روی صفحه α عبارتند از قطرهای دایره ای از این صفحه که مرکزش A و شعاعش $2k$ می باشد.

۳- نقطه های P_1' و P_2' را نقطه های برخورد دو دایره عظیمه از کره α' می گیریم که یکی از آنها بر O و A می گذرد. در این صورت P_1 و P_2 در صفحه α نقطه های برخورد خطی گذرنده بر A با دایره ای هستند که از دو نقطه Q_1 و Q_2 می گذرد و این دو نقطه دوسر قطری از دایره به مرکز A و به شعاع $2k$ یعنی دوسر قطری از دایره تصویر استوا می باشند. چون داریم:

$$AP_1 \cdot AP_2 = AQ_1 \cdot AQ_2 = -(2k)^2$$

پس P_1 و P_2 توسط يك انعکاس متفی به هم مربوط می باشند که ترکیبی است از يك انعکاس نسبت به دایره تصویر استوا با نیم دور حول A .

۴- کره α' را در نظری می گیریم که بردوازده یال مکعب در وسط آنها مماس می باشد. یکی از نقطه های برخورد این کره با خط واصل بین دو رأس روبرو از مکعب را O می نامیم. O را مرکز تصویر جسم نمایی نسبت به کره α' قرار می دهیم. (هرگاه یکی از نقطه های برخورد خط واصل بین مرکزهای دو وجه روبرو با کره α' را O مرکز تصویر برگزینیم، شکل حاصل شکل متقارن چستان اشتین در حالت $n=4$ خواهد بود).

۱۳۰۰۰	اقلیدس	۱۴۶	آپولونیوس (دایره)
۱۴۴	اقلیدسی (صفحه)	۱۴	آنه‌لی لاکس
۱۵۵	اقلیدسی (هندسه)		■ ارتفاع
۱۵۵	انتقال	۲۱	ارتفاعی (چهار گوشه)
۱۵۷	انحراف انعکاسی	۵۴	ارتفاعی (مثلث)
۱۳۹	انعکاس	۳۵	ارتفاعی (مرکز)
۱۳۳	انعکاس (دایره)	۲۱	اسپیکر (تثودور)
۱۳۹	انعکاس (قطب)	۹۹	استوارت (رابطة)
۱۳۹	انعکاس (قوت)	۱۹	استوارت (قضیه)
۱۸۸	انعکاس (کره)	۴۴	اسکوت
۱۴۴	انعکاس در صفحه	۱۲۸	اسموگورزوسکی (قضیه)
۱۵۷	انعکاسی (انحراف)	۱۵۱	اشتینر (چیستان)
۱۴۶	انعکاسی (صفحه)	۱۵۹	اشتینر - له موس (قضیه)
۱۳۳	انعکاسی (هندسه)	۲۶	اشتینر (هیپوسیکلوئید)
۳۲	اولر	۶۵	اصل پونسله
۳۲	اولر (خط)	۱۶۹	اصل دزارگ
۳۵	اولر (دایره)	۱۶۹	اصل دوگانگی
۴۳	اولر (رابطة)	۱۶۹	اصلی (دایره)
۴۳	اولر (قضیه)	۱۸۷	اصلی (محور)
		۴۶	اصلی (مرکز)
۷۴	■ براهما گوپتا (دستور)	۵۵	

۲۷	تثلیث زاویه	۹۹	بره کنریج (ولبلیام)
۱۲۲	تجانس	۱۰۰	بریانسن (قضیه)
۱۲۳	تجانس (نسبت)	۵۶	بطلمیوس (قضیه)
۱۲۳	تجانس (مرکز)	۱۵، ۴۶	بل (اریک تمپل)
۲۷	تربیع دایره	۱۶۰	بلیایی (هندسه)
۱۲۲	تشابه	۳۰	بو تما (مثلث)
۱۲۳	تشابه (نسبت)	۱۷۶	بیضی
۱۸۷	تصویر جسم نمایی	۱۸۱	بینهایت (خط)
۱۸۷	تصویر مرکزی	۱۴۶	بینهایت (نقطه)
۱۸۱	تصویری (صفحه)	۸۷، ۹۶	■ پاپوس (قضیه)
۱۶۷	تصویری (هندسه)	۱۳۳	پاتنیم (مساوقات)
۲۷	تضعیف مکعب	۹۹	پاسکال (خط)
۱۳۰	تغییر شکل پروکوست	۹۶	پاسکال (قضیه)
۱۱۱	تقارن محوری	۱۳۳	پتارد
۱۰۹	تقارن مرکزی	۱۲۸	پترسن (جولیس)
۳۲	■ ثقل (مرکز)	۱۲۸، ۱۲	پترسن - اسکوت (قضیه)
۱۳۶	■ جداسازی	۶۱	پروانه (قضیه)
۱۳۳	جداساز (جفتهای نقطهها)	۱۳۰	پروکوست (تغییر شکل)
۱۸۷	جسم نمایی (تصویر)	۳۶	پودر (مثلث)
۱۳۳	جفتهای نقطههای جداساز	۱۴۱	پوسلیه (عاکس)
۶۷	■ چهار گوشه	۱۷۰	پوش
۵۴	چهار گوشه ارتفاعی	۳۴	پونسله
۷۴	چهار گوشه محاطی	۱۳۰	پیوسته (تبدیل)
۱۵۹	چیستان اشتینر	۱۶۱	■ تابعهای هذلولوی
۱۵۳	■ حد (نقطههای)	۱۶۱	تانزانته هیپر بولیک
۱۷۵	■ خروج از مرکز	۱۳۰	تبدیل پیوسته
۳۲	خط اولر	۱۲۴	تبدیل تشابهی
۱۸۱	خط بینهایت	۱۳۰	تبدیل خطی
		۱۰۴	تبدیل شکلهای
		۱۶۷	تبدیل قطبی معکوس
		۱۳۰	تبدیلهای متوالی

۱۶۹	دوگانگی (اصل)	۹۹	خط پاسکال
۴۳	■ رابطه اولر	۵۵	خط سمن (= خط سنسن)
۲۶	رابطه ژرگون	۱۷	خط سوایی
۱۸۷	رسم الجسمی (تصویر)	۱۷۸	خط هادی
۵۶	رشته فیوناچی	۶۷	خطهای متقارب
۲۷	■ زاویه (تثلیث)	۱۷۱	خطهای مزدوج
۱۶۴	رنجیره (منحنی)	۱۳۰	خطی (تبدیل)
	■	۱۰۴	خنوخ
۲۱۷	ژاکوبن (نقطه‌های)	۶۷	■ داگسن
۲۶	ژرگون (رابطه)	۴۱	دایره (برخی ویژگیهای)
۲۶	ژرگون (نقطه)	۲۷	دایره (تربیع)
	■	۱۴۶	دایره آپولونیوس
۱۴۷	سدی (دایره‌های)	۱۸۷	دایره اصلی
۵۵	سمن (خط)	۳۵	دایره اولر
۱۷	سوا (قضیه)	۱۸۹	دایره عظیمه
۱۷	سوائی (خط)	۲۳	دایره محاطی مثلث
۱۱۶	سه پیمانانه (مسئله)	۲۰	دایره محیطی مثلث
۱۷۶	سهمی	۱۷۳	دایره مزدوج مثلث
۱۶	سینوسها (قانون)	۳۴	دایره نه نقطه
۱۶۱	سینوس همپربولیک	۱۵۵	دایره نیمساز دودایره
	■	۴۹	دایره‌ها (دسته)
۹۵	شش ضلعیها	۱۴۷	دایره‌های سدی
۸۷	شکل قطاع	۱۴۷	دایره‌های عمود برهم
	■	۹۲	دزارگ (قضیه)
۱۴۶	صفحه انعکاسی	۷۴	دستور براهما گوپتا
۱۸۱	صفحه تصویری	۴۹، ۱۵۳	دسته دایره‌ها
	■	۲۹	دسکوب (مهندس)
۱۴۱	عاکس پوشلیه	۴۶	دکارت (رنه)
۱۸۹	عظیمه (دایره)	۶۰	دلتوئید
۱۰۵	عمل همانی	۱۰۷	دوران
۱۴۷	عمود برهم (دایره‌های)		

۱۶۷	قطبی معکوس (تبدیل)	۳۶	عمودی (مثلت)
۱۳۹	قوت انعکاس	■	
۴۱	قوت نقطه	۱۶۵	غیر اقلیدسی (هندسه)
■		۱۳۷	غیر توافقی (نسبت)
۳۷	کازی (جان)	■	
۳	کاکسه تر	۱۱۳	فاکتانو (مسئله)
۱۷۵	کانون	۴۶	فرما (بیر)
۹۹	کبک (ژولیت)	۱۰۸	فرما (نقطه)
۴۱، ۱۷۶	کپلر	۱۶۷	فلویر (گوستاو)
۱۸۸	کره انعکاس	۱۵۰	فوئر باخ (قضیه)
۱۶۱	کسینوس هیپر بولیک	۸۰، ۹۷	فوردر
۱۵۵	کلین (فلیکس)	۵۶	فیوناچی (رشته)
■		■	
۲۸	گاردنر (مارتین)	۱۶	قانون سینوسها
۳	گریتز	۴۴	قضیه استوارت
۱۶۰	گوس (هندسه)	۱۰۱	قضیه اسموگودزوسکی
■		۲۶	قضیه اشتینر - لهموس
۸۱	لاگرانژ	۴۳	قضیه اولر
۷۴	لامب	۵۶	قضیه بطلمیوس
۹۷	لایپنیز	۸۷، ۹۶	قضیه پاپوس
۱۶۰	لو باچفسکی (هندسه)	۹۶	قضیه پاسکال
۲۷	لهموس (قضیه)	۱۲۸، ۱۲۹	قضیه پترسن - اسکوت
۱۴۱	لیپکین	۶۱	قضیه پروانه
■		۹۲	قضیه دزارگ
۳	مارشان	۱۷	قضیه سوا
۱۷۸	متساوی القطرین (هذلولی)	۱۵۰	قضیه فوئر باخ
۷۵	متوازی الاضلاع وارینیون	۸۰	قضیه محور
۱۹	مثلت (نقاط مهم)	۸۵	قضیه منلاؤوس
۲۱، ۳۰	مثلت از تقاعی	۶۳	قضیه مورلی
۳۵	مثلت بوتما	۶۷	قضیه وارینیون
۳۶	مثلت پودر	۱۳۹	قطب انعکاس
۳۶	مثلت عمودی	۱۶۷	قطب و قطبی

۱۸۳	مقطعه‌های مخروطی مرکزدار	۱۷۳	مثلث مزدوج
۱۷۰	مکان هندسی	۳۲	مثلث میانه‌ای
۲۷	مکعب (تضعیف)	۷۹	مثلث ناپلئون
۹۹	مک لورن	۱۱۷	مثلثی (مختصات)
۱۳۹	مگنوس	۱۷۶	مجاانب
۱۶۴	منحنی زنجیره	۷۴	محاطی (چهار گوشه)
۱۳۹	منعکس	۲۳	محاطی (دایره)
۸۵	منلائوس (قضیه)	۸۰	محور (قضیه)
۶۳	مورلی (قضیه)	۴۶	محور اصلی
۲۰	میانه	۱۸۵	محور مقطع مخروطی
۳۲	میانه‌ای (مثلث)	۹۳	محور همسانی
۸۰	میکل	۱۱۷	مختصات مثلثی
■		۱۷۵	مخروطی (مقطع)
۷۹	ناپلئون (مثلث)	۲۱	مرکز ارتفاعی
۶۳	نارانینگار	۵۰	مرکز اصلی
۱۳۷	ناهمساز (نسبت)	۱۲۳	مرکز تجانس
۱۲۳	نسبت تجانس	۲۰	مرکز ثقل
۱۲۳	نسبت تشابه	۲۳	مرکز دایره محاطی
۸۷	نسبت مؤلف	۱۹	مرکز دایره محیطی
۱۳۷	نسبت ناهمساز	۱۸۴	مرکز مقطع مخروطی
۱۹	نقاط مهم مثلث	۹۲	مرکز همسانی
۲۶	نقطه ژرگون	۱۸۷	مرکزی (تصویر)
۴۱	نقطه (قوت)	۱۷۱	مزدوج (خطهای)
۶۷	نقطه‌های بريك استقامت	۱۷۱	مزدوج (دایره)
۱۷۱	نقطه‌های مزدوج	۱۷۳	مزدوج (مثلث)
۳۴	نقطه (دایره)	۱۷۱	مزدوج (نقطه‌های)
۱۰۹	نیم‌دور	۱۲۲	مزدوج هم‌زاویه‌ای
۲۲	نیمساز (خط)	۶۱	مسئله پروانه = قضیه پروانه
۱۵۵	نیمساز (دایره)	۱۱۶	مسئله سه پیمان
۳۷	نیوبرگ	۱۱۳	مسئله فاگنانو
۴۴-۱۷۶	نیوتن	۱۷۵	مقطعه‌های مخروطی

۹۲	همسانی (مرکز)	۶۷	واریونیون (قضیه)
۱۰۵	هندسه اقلیدسی	۷۰	واریونیون (متوازی الاضلاع)
۱۳۳	هندسه انعکاسی	۵۶	والاس (ویلیام)
۱۶۷	هندسه تصویری		■
۱۶۰	هندسه غیر اقلیدسی	۱۷۸	هادی (خط)
۱۶۰	هندسه گوس-بلیائی-لوباچفسکی	۲۹	هاردی
۱۶۱	هندسه هذلولوی	۱۶۱	هذلولوی (تابعهای)
۱۶۱	هیپر بولیک (تابعهای)	۱۶۱	هذلولوی (هندسه)
۱۶۱	هیپر بولیک (تائزانت)	۱۷۶	هذلولوی
۱۶۱	هیپر بولیک (سینوس)	۱۷۸	هذلولوی متسادی القطرین
۱۶۱	هیپر بولیک (کسینوس)	۶۲	هرنر
۶۰	هیپوسیکلوئید اشتینر	۷۷	هرون اسکندرانی
	■	۱۰۵	همانی
۶۲	یکان (مجله ریاضیات)	۱۰۵	هم اندازگی
۷۳	یگلولوم	۱۲۲	هم زاویه ای
		۹۲	همسان (مثلثهای)
		۹۳	همسانی (محور)